

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
4. travnja 2003. godine

6. razred

1. Izračunaj:

$$\frac{(2.4 + 1\frac{1}{2}) \cdot 2.5 + (6\frac{1}{12} : 6 - 1\frac{1}{72}) : (8\frac{5}{7} - 1\frac{5}{21})}{54.75 - 4.5 : 0.1}$$

2. Odredi sve brojeve oblika $\overline{31a}$ i $\overline{62b1}$ tako da njihov umnožak bude djeljiv s 15.
3. Dva prijatelja Marko i Ivan imali su jednak broj sličica koje su međusobno mijenjali. Najprije je Ivan dao Marku svojih 20 sličica. Zatim je Marko dao Ivanu dvije trećine sličica koje je imao i nakon toga je imao četiri puta manje sličica od Ivana. S koliko su sličica Marko i Ivan započeli razmjenu?
4. Zadan je jednakokratan trokut ABC s osnovicom \overline{BC} . Nad krakovima \overline{AB} i \overline{AC} s vanjske strane trokuta ABC konstruirani su jednakostranični trokuti BAM i ACN . Ako je točka P polovište osnovice \overline{BC} , onda je trokut MPN jednakokratan. Dokaži.
5. Zadan je jednakokratan trokut ABC s osnovicom \overline{BC} tako da je $\sphericalangle BAC > 30^\circ$. Na osnovici \overline{BC} dana je točka M takva da je $\sphericalangle BAM = 30^\circ$, a na kraku \overline{AC} točka N tako da je $|AM| = |AN|$. Koliki je kut $\sphericalangle CMN$?

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zadan razlomak možemo napisati u ovom obliku

$$\frac{(2,4 - 1,5) \cdot 2,5 - (1 \frac{1}{72} - 1 \frac{1}{72}) : (8 \frac{17}{21} - 1 \frac{7}{21})}{51,75 - 45}$$

5 bodova

Dalje redom dobivamo da je razlomak jednak

$$\frac{3,9 \cdot 2,5 - 0 : 7 \frac{10}{21}}{9,75} = \frac{9,75}{9,75} = 1.$$

5 bodova

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Da bi umnožak brojeva $\overline{31a}$ i $\overline{62b1}$ bio djeljiv s 15 mora bar jedan od njih biti djeljiv s 5 i isto tako bar jedan od njih mora biti djeljiv s 3. 2 bod

Kako je posljednja znamenka drugog broja jednaka 1, to znači da on nije djeljiv s 5, pa to mora biti prvi broj tako da je $a = 0$ ili $a = 5$. 2 boda

Ako je $a = 5$, onda je broj 315 djeljiv s 15, pa znamenka b može biti bilo koja od 10 znamenki, tj. drugi broj može biti 6201, 6211, 6221, 6231, 6241, 6251, 6261, 6271, 6281, 6291. 3 boda

Ako je $a = 0$, onda je prvi broj 310 i nije djeljiv s 3, pa to mora biti drugi broj $\overline{62b1}$. Znamenka b može biti 0, 3, 6, 9, pa drugi broj može biti 6201, 6231, 6261, 6291. 3 boda

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su prije razmjene Ivan i Marko imali po x sličica. 1 bod

Nakon što je Ivan dao Marku 20 sličica, Marko je imao $x + 20$, a Ivan $x - 20$ sličica. 2 boda

Zatim je Marko Ivanu dao $\frac{2}{3}$ svojih sličica, pa je njemu ostalo $\frac{1}{3}(x + 20)$ sličica. 1 bod

Ivan sada ima $x - 20 + \frac{2}{3}(x + 20) = \frac{5}{3}x - \frac{20}{3}$ sličica. 1 bod

Kako sada Marko ima četiri puta manje sličica od Ivana, to vrijedi $\frac{5}{3}x - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}(x + 20)$. 2 boda

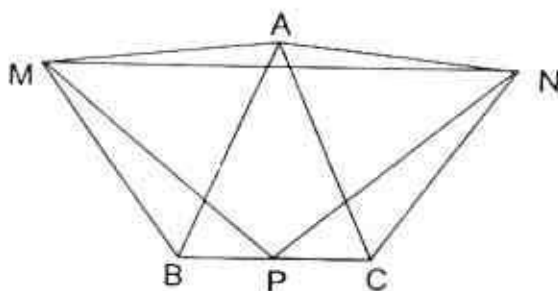
Sredivanjem jednačbe imamo $\frac{5}{3}x - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}x + \frac{80}{3}$, odnosno $\frac{1}{3}x = \frac{100}{3}$. 2 boda

Dakle, $x = 100$, pa su Marko i Ivan počeli razmjenu sa po 100 sličica. 1 bod

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. SLIKA

2 boda



Pokazat ćemo da su trokuti BPM i PCN sukladni iz čega ćemo zaključiti da je $|MP| = |NP|$.

Kako je P polovište osnovice BC to je $|BP| = |CP|$. 1 bod

Kako su jednakokranični trokutuvi BAM i CNA konstruirani nad krakovima jednakokravnog trokuta, oni imaju jednake duljine stranica pa je $|BM| = |CN|$. 2 boda

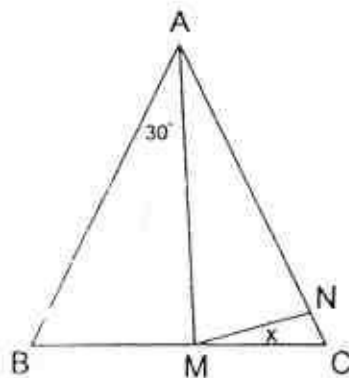
U jednakokravnom trokutu je $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BCA$, pa imamo $\sphericalangle PBM = \sphericalangle CBA + 60^\circ = \sphericalangle BCA + 60^\circ = \sphericalangle PCN$. 2 boda

Trokuti BPM i PCN se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih, pa su sukladni. 1 bod

Zbog te sukladnosti je i $|MP| = |NP|$, pa je trokut MPN jednakokravan. 2 boda

..... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Veličinu kuta kojeg tražimo označimo sa $x = \sphericalangle CMN$.

1 bod

Kako je trokut ABC jednakokrani onda je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \beta$.

1 bod

Prema uvjetu zadatka je $|AM| = |AN|$, što znači da je i trokut AMN jednakokrani, pa je

$\sphericalangle AMN = \sphericalangle ANM = \gamma$.

1 bod

Kako je γ vanjski kut trokuta MNC , slijedi da je $\gamma = x + \beta$

2 boda

Nadalje kako je $\sphericalangle AMC$ vanjski kut trokuta BMA , to je $\sphericalangle AMC = \beta + 30^\circ$.

2 boda

Sada je $\gamma + x = \beta + 30^\circ$.

1 bod

odnosno $x + \beta + x = \beta + 30^\circ$ odakle je $x = 15^\circ$.

2 boda

..... UKUPNO 10 BODOVA