MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
4. travnja 2003. godine

6. razred

1. Izračunaj:

$$\frac{(2.4 + 1\frac{1}{2}) \cdot 2.5 + (6\frac{1}{12} : 6 - 1\frac{1}{72}) : (8\frac{5}{7} - 1\frac{5}{21})}{54.75 - 4.5 : 0.1}.$$

2. Odredi sve brojeve oblika $\overline{31a}$ i $\overline{62b1}$ tako da njihov umnožak bude djeljiv s 15.

3. Dva prijatelja Marko i Ivan imali su jednak broj sličica koje su međusobno mijenjali. Najprije je Ivan dao Marku svojih 20 sličica. Zatim je Marko dao Ivanu dvije trećine sličica koje je imao i nakon toga je imao četiri puta manje sličica od Ivana. S koliko su sličica Marko i Ivan započeli razmjenu?

4. Zadan je jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{BC}$. Nad krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ s vanjske strane trokuta ABC konstruirani su jednakostranični trokuti BAM i ACN. Ako je točka P polovište osnovice $\overline{BC}$, onda je trokut MPN jednakokračan. Dokaži.

5. Zadan je jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{BC}$ tako da je $\sphericalangle BAC > 30°$. Na osnovici $\overline{BC}$ dana je točka M takva da je $\sphericalangle BAM = 30°$, a na kraku $\overline{AC}$ točka N tako da je $|AM| = |AN|$. Koliki je kut $\sphericalangle CMN$?

Ž/Ž 2003

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Zadani razlomak možemo napisati u ovom obliku

$$\frac{(2.4+1.5)\cdot 2.5-(1\frac{1}{72}-1\frac{1}{72}):(8\frac{15}{21}-1\frac{5}{21})}{54.75-45}.$$

5 bodova

Dalje redom dobivamo da je razlomak jednak

$$\frac{3.9\cdot 2.5-0:7\frac{10}{21}}{9.75}=\frac{9.75}{9.75}=1.$$

5 bodova

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Da bi umnožak brojeva $\overline{31a}$ i $\overline{62b1}$ bio djeljiv s 15 mora bar jedan od njih biti djeljiv s 5 i isto tako bar jedan od njih mora biti djeljiv s 3 — 2 bod

Kako je posljednja znamenka drugog broja jednaka 1, to znači da on nije djeljiv s 5, pa to mora biti prvi broj tako da je $a=0$ ili $a=5$. — 2 boda

Ako je $a=5$, onda je broj 315 djeljiv s 15, pa znamenka b može biti bilo koja od 10 znamenki, tj. drugi broj može biti $6201, 6211, 6221, 6231, 6241, 6251, 6261, 6271, 6281, 6291$. — 3 boda

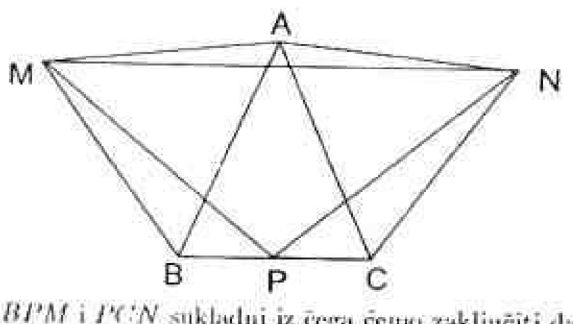
Akoje $a=0$, onda je prvi broj 310 i nije djeljiv s 3, pa to mora biti drugi broj $\overline{62b1}$.
Znamenka b može biti $0, 3, 6, 9$, pa drugi broj može biti $6201, 6231, 6261, 6291$. — 3 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su prije razmjene Ivan i Marko imali po x sličica. — 1 bod
Nakon što je Ivan dao Marku 20 sličica, Marko je imao $x+20$, a Ivan $x-20$ sličica. — 2 boda
Zatim je Marko Ivanu dao $\frac{2}{3}$ svojih sličica, pa je njemu ostalo $\frac{1}{3}(x+20)$ sličica. — 1 bod
Ivan sada ima $x-20+\frac{2}{3}(x+20)=\frac{5}{3}x-\frac{20}{3}$ sličica. — 1 bod
Kako sada Marko ima četiri puta manje sličica od Ivana, to vrijedi $\frac{5}{3}x-\frac{20}{3}=\frac{4}{3}(x+20)$ — 2 boda
Sređivanjem jednadžbe imamo $\frac{5}{3}x-\frac{20}{3}=\frac{4}{3}x+\frac{80}{3}$, odnosno $\frac{1}{3}x=\frac{100}{3}$. — 2 boda
Dakle, $x=100$, pa su Marko i Ivan počeli razmjenu sa po 100 sličica. — 1 bod

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. SLIKA — 2 boda

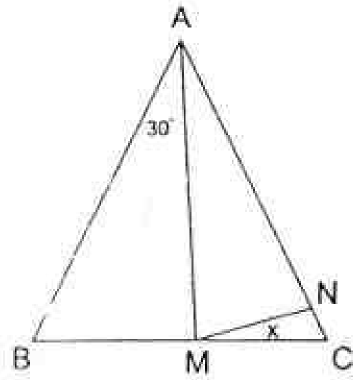


Pokazat ćemo da su trokuti BPM i PCN sukladni iz čega ćemo zaključiti da je $|MP|=|NP|$.
Kako je P polovište osnovice $\overline{BC}$ to je $|BP|=|CP|$. — 1 bod
Kako su jednakostranični trokutovi BAM i CNA konstruirani nad krakovima jednakokračnog trokuta, oni imaju jednake duljine stranica pa je $|BM|=|CN|$. — 2 boda
U jednakokračnom trokutu je $\sphericalangle CBA=\sphericalangle BCA$, pa imamo
$\sphericalangle PBM=\sphericalangle CBA+60^\circ=\sphericalangle BCA+60^\circ=\sphericalangle PCN$ — 2 boda
Trokuti BPM i PCN se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih, pa su sukladni. — 1 bod
Zbog te sukladnosti je i $|MP|=|NP|$, pa je trokut MPN jednakokračan. — 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

ŽU 2007
M6

5.



Veličinu kuta kojeg tražimo označimo sa $x = \sphericalangle CMN$. 1 bod

Kako je trokut ABC jednakokračan onda je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \beta$. 1 bod

Prema uvjetu zadatka je $|AM| = |AN|$, što znači da je i trokut AMN jednakokračan, pa je $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ANM = \gamma$. 1 bod

Kako je γ vanjski kut trokuta MCN, slijedi da je $\gamma = x + \beta$ 2 boda

Nadalje kako je $\sphericalangle AMC$ vanjski kut trokuta BMA, to je $\sphericalangle AMC = \beta + 30^\circ$. 2 boda

Sada je $\gamma + x = \beta + 30^\circ$, 1 bod

odnosno $x + \beta + x = \beta + 30^\circ$ odakle je $x = 15^\circ$. 2 boda

....UKUPNO 10 BODOVA