MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
4. travnja 2003. godine

7. razred

1. Riješi nejednadžbu i grafički prikaži njezino rješenje

$$\frac{5-2x}{4+2x} > 0.$$

2. Odredi brojeve $a, b, c$, ako je njihov zbroj za $\frac{5}{2}$ veći od broja $a$, za $\frac{59}{6}$ veći od broja $b$ i za $\frac{5}{3}$ veći od broja $c$.

3. Tekućinom iz prve slavine posuda se napuni za 10 minuta, a tekućinom iz druge slavine za 15 minuta. Ako uz ove dvije slavine otvorimo još i treću slavinu, posuda će se napuniti za 5 minuta. Koliko bi vremena bilo potrebno da se posuda napuni tekućinom ako su istovremeno otvorene druga i treća slavina ?

4. Oko kruga promjera $3\frac{1}{5}$ cm opisan je sedmerokut čije sve stranice dodiruju krug. Površina sedmerokuta je 20 cm$^2$. Izračunaj opseg sedmerokuta.

5. Dan je trokut $ABC$. Simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki $N$. U ravnini je odabrana točka $M$ tako da točke $A$ i $M$ ne leže s iste strane pravca $BC$ i tako da je $\sphericalangle NBM = \sphericalangle BNA$ i $|BM| = |AN|$. Presjek pravca $MN$ i stranice $\overline{BC}$ označimo s $D$. Dokaži da vrijedi

$$|BD| = |DN|.$$

ŽU 2003

# RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

**OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

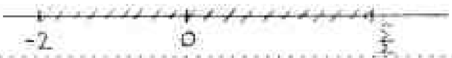
**1.** Vrijednost razlomka je pozitivna ako su brojnik i nazivnik istog predznaka. Zato razlikujemo dva slučaja. 1 bod

1. $5-2x>0$ i $4+2x>0$, tj. $x<\frac{5}{2}$ i $x>-2$. Skup rješenja su svi brojevi za koje je $-2<x<\frac{5}{2}$. 3 boda

2. $5-2x<0$ i $4+2x<0$, tj. $x>\frac{5}{2}$ i $x<-2$. U ovom slučaju rješenje ne postoji. 3 boda

Dakle, zadani će razlomak biti pozitivan ako je $-2<x<\frac{5}{2}$. 1 boda

Grafički prikaz rješenja: 2 boda




........................ UKUPNO 10 BODOVA

**2.** Imamo ove tri jednadžbe: $a+b+c=a+\frac{5}{2}$, $a+b+c=b+\frac{59}{6}$, $a+b+c=c+\frac{5}{3}$. 3 boda

Sređivanjem dobivamo: $b+c=\frac{5}{2}$, $a+c=\frac{59}{6}$, $a+b=\frac{5}{3}$. Zbrajanjem te tri jednadžbe dobivamo: $2a+2b+2c=14$, tj. $a+b+c=7$. 3 boda

Sad je $a=7-\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$, $b=7-\frac{59}{6}=-\frac{17}{6}$, $c=7-\frac{5}{3}=\frac{16}{3}$. 4 bodova

........................ UKUPNO 10 BODOVA

**3.** Neka je $x$ vrijeme u minutama potrebno da se posuda napuni tekućinom iz treće slavine. U jednoj minuti tekućinom iz prve slavine napuni se $\frac{1}{10}$ posude, iz druge $\frac{1}{15}$ posude, a iz treće $\frac{1}{x}$ posude. 3 boda

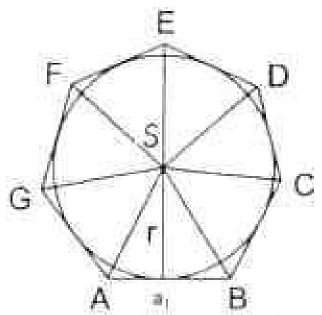
Otvore li se sve tri slavine u jednoj minuti napuni se $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{x}$ posude, a za 5 minuta cijela posuda. Dakle, $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$. 3 boda

Iz te jednadžbe dobivamo da je $\frac{1}{x}=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}$, $x=30$ min 2 boda

Druga i treća slavina za jednu minutu napune $\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10}$ posude, pa im je za punjenje potrebno 10 minuta. 2 boda

........................ UKUPNO 10 BODOVA

**4.** Označimo stranice sedmerokuta s $a_1,\ldots,a_7$. Polumjer kruga upisanog u sedmerokut iznosi $r=\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{5}=\frac{8}{5}$ cm. 1 bod



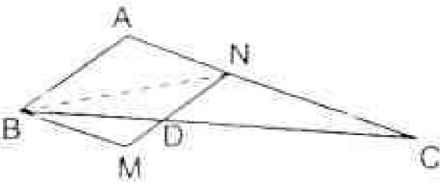

Sedmerokut je podijeljen na sedam trokuta $ABS, BCS, CDS, DES, EFS, FGS, GAS$ čije su površine redom $P(ABS)=\frac{a_1\cdot r}{2}, \ldots P(GAS)=\frac{a_7\cdot r}{2}$. 3 boda

Zbroj površina tih trokuta jednak je površini sedmerokuta, tj. $\frac{a_1\cdot r}{2}+\frac{a_2\cdot r}{2}+\frac{a_3\cdot r}{2}+\frac{a_4\cdot r}{2}+\frac{a_5\cdot r}{2}+\frac{a_6\cdot r}{2}+\frac{a_7\cdot r}{2}=20$. 2 boda

Sad je $\frac{r(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)}{2}=20$, tj. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=25$ cm. 3 boda

Dakle, opseg sedmerokuta je 25 cm. 1 bod ........................ UKUPNO 10 BODOVA

5.




Dokažimo da je $\triangle BMN \cong \triangle ABN$. Naime $|BM| = |AN|$ i $\sphericalangle NBM = \sphericalangle BNA$ prema uvjetu zadatka, a $\overline{BN}$ je zajednička stranica, što je dovoljno za dokaz. 4 boda

Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $\sphericalangle ABN = \sphericalangle BNM$, a zbog $\sphericalangle ABN = \sphericalangle NBC$ slijedi da je $\sphericalangle BNM = \sphericalangle NBC$. To znači da je trokut $BND$ jednakokračan. 4 boda

Stoga je $|BD| = |DN|$ što je i trebalo dokazati. 2 boda

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . UKUPNO 10 BODOVA