MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
4. travnja 2003. godine

8. razred

1. Izračunaj

$$\left(\frac{3}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{17}+\sqrt{14}}-\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^2.$$

2. Odredi sve uređene parove (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi jednakost

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1.$$

3. U pravokutnom trokutu ABC na katetama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ dane su redom točke M i N. Dokaži da vrijedi

$$|AN|^2+|BM|^2=|MN|^2+|AB|^2.$$

4. U jednakokračni pravokutni trokut upisan je romb tako da je jedan vrh romba ujedno i vrh šiljastog kuta pravokutnog trokuta, a preostala tri vrha romba leže svaki na jednoj stranici danog pravokutnog trokuta. Koliki je polumjer kružnice opisane pravokutnom jednakokračnom trokutu ako je duljina stranice romba $3(\sqrt{2}-1)$ cm?

5. Točke $A(3,0)$ i $C(-4,1)$ dva su nasuprotna vrha kvadrata $ABCD$. Odredi koordinate vrhova B i D ako vrh B leži na pozitivnom dijelu osi y.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $$\left(\frac{3}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{17}+\sqrt{14}}-\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^2$$
$$=\left(\frac{3}{\sqrt{14}-\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{14}+\sqrt{11}}{\sqrt{14}+\sqrt{11}}+\frac{3}{\sqrt{17}+\sqrt{14}}\cdot\frac{\sqrt{17}-\sqrt{14}}{\sqrt{17}-\sqrt{14}}-\frac{11}{\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}\right)^2$$
$$=\left(\frac{3(\sqrt{14}+\sqrt{11})}{14-11}+\frac{3(\sqrt{17}-\sqrt{14})}{17-14}-\sqrt{11}\right)^2$$
$$=\left(\frac{3(\sqrt{14}+\sqrt{11})}{3}+\frac{3(\sqrt{17}-\sqrt{14})}{3}-\sqrt{11}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{14}+\sqrt{11}+\sqrt{17}-\sqrt{14}-\sqrt{11}\right)^2=(\sqrt{17})^2=17.$$
Postupak 8 bodova, točno rješenje 2 boda.

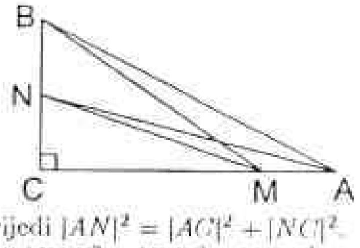
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Brojevi $\frac{x^2}{9}$ i $\frac{y^2}{25}$ su dva nenegativna broja čiji je zbroj jednak 1. Zbog toga je svaki od tih brojeva manji ili jednak 1, tj. $\frac{x^2}{9}\le 1$, $\frac{y^2}{25}\le 1$. Odatle zaključujemo da je $x^2\le 9$ i $y^2\le 25$. Dakle, x je cijeli broj čiji je kvadrat manji ili jednak 9, tj. $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, a y je cijeli broj čiji je kvadrat manji ili jednak 25, tj. $y\in\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$. 4 boda

Ako je $x=\pm 3$, tada je $\frac{x^2}{9}=1$, pa je $\frac{y^2}{25}=0$, tj. $y=0$.
Ako je $x=\pm 2$, tada je $\frac{x^2}{9}=\frac{4}{9}$, pa je $\frac{y^2}{25}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$, tj. $y^2=\frac{125}{9}$, a ta jednadžba nema rješenja u Z.
Ako je $x=\pm 1$, tada je $\frac{x^2}{9}=\frac{1}{9}$, pa je $\frac{y^2}{25}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$, tj. $y^2=\frac{200}{9}$, a ta jednadžba nema rješenja u Z.
Ako je $x=0$, tada je $\frac{x^2}{9}=0$, pa je $\frac{y^2}{25}=1$, tj. $y=\pm 5$. 4 boda
Traženi uređeni parovi su $(-3,0),(3,0),(0,-5),(0,5)$. 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Skica 1 bod



U pravokutnom trokutu ANC vrijedi $|AN|^2=|AC|^2+|NC|^2$. 2 boda
U pravokutnom trokutu BMC vrijedi $|BM|^2=|BC|^2+|CM|^2$. 2 boda
Zbrajanjem te dvije jednakosti dobivamo

$$|AN|^2+|BM|^2=(|AC|^2+|NC|^2)+(|BC|^2+|CM|^2)=(|AC|^2+|BC|^2)+(|NC|^2+|CM|^2)=|AB|^2+|MN|^2,$$

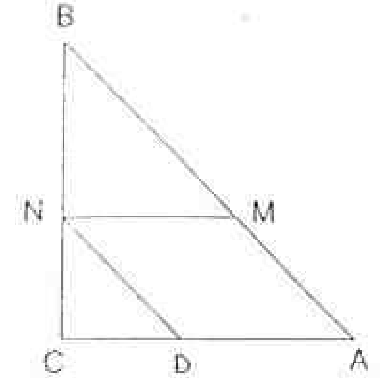
pri čemu smo primijenili Pitagorin poučak u trokutima ABC i MNC. 5 bodova

.... UKUPNO 10 BODOVA

AH

8 r.

4.



Neka je u trokutu ABC kut $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Tada je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 45^\circ$. Neka je vrh A jedan vrh romba. Vrh romba na hipotenuzi $\overline{AB}$ označimo s M, na kateti $\overline{BC}$ s N, a na kateti $\overline{AC}$ s D.
Iz paralelnosti pravaca MN i AC slijedi da je $\sphericalangle MNB = 90^\circ$, pa je $\sphericalangle NMB = \sphericalangle NBM = 45^\circ$, tj. i trokut NMB je jednakokračni pravokutni trokut. 3 boda
Stranica romba duljine je $3(\sqrt{2}-1)$ cm, pa iz svojstva da je trokut NMB polovica kvadrata slijedi da je
$|MB| = |MN|\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 6 - 3\sqrt{2}$. 3 boda
$|AB| = |AM| + |MB| = 3(\sqrt{2}-1) + 6 - 3\sqrt{2} = 3$ cm. 2 boda

Budući da je polumjer opisane kružnice jednak polovini duljine hipotenuze, slijedi da je polumjer jednak 1.5 cm. 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo sa S sjecište dijagonala kvadrata. Tada je S polovište dužine $\overline{AC}$ i njegove koordinate su $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 2 boda

Jednadžba pravca AC na kojem leži dijagonala glasi: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, $y - 0 = \frac{1-0}{-4-3}(x-3)$.
$y = -\frac{1}{7}x + \frac{3}{7}$. 2 boda
Pravac BD na kojem leži druga dijagonala kvadrata okomit je na pravac AC i prolazi točkom S, pa njegova jednadžba glasi: $y - y_1 = a(x - x_1)$, $y - \frac{1}{2} = 7(x + \frac{1}{2})$, $y = 7x + 4$ 2 boda
Točka B leži na tom pravcu, ali i na y osi, pa je ona presjek ta dva pravca. Rješavamo sustav jednadžbi: $y = 7x + 4$, $x = 0$. Koordinate točke B su $(0, 4)$. 2 boda
Točka S polovište je i dužine $\overline{BD}$, pa vrijedi:

$$x_S = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_S = \frac{y_B + y_D}{2}$$

Iz ovih jednadžbi dobivamo da je $x_D = -1$ i $y_D = -3$, tj. točka D ima koordinate $(-1, -3)$. 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

Do koordinata točke B može se doći i bez povlačenja okomice i to korištenjem Pitagorina poučka i rješavanjem kvadratne jednadžbe koja se javlja. Naime, $|AB| = |BC|$, pa je $|AC|^2 = 2|AB|^2$, $1^2 + 7^2 = 2(3^2 + y^2)$, $y^2 = 16$, $y = 4$ jer se B nalazi na pozitivnom dijelu osi y. Dalje se do koordinata točke D dolazi kao na gore opisani način.