MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Trogir, 5. – 8. svibnja 2004. godine

I. razred

1. Odredite sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2(xz + yz + x + y), \\ y^2 - z^2 &= 2(yx + zx + y + z), \\ z^2 - x^2 &= 2(zy + xy + z + x). \end{aligned}$$

2. Dokažite da su težišnice iz vrhova A i B trokuta ABC međusobno okomite ako i samo ako za duljine stranica vrijedi jednakost

$$|BC|^2 + |AC|^2 = 5|AB|^2.$$

3. Dokažite da za svaka tri realna broja x, y, z vrijedi nejednakost

$$|x| + |y| + |z| - |x+y| - |y+z| - |z+x| + |x+y+z| \geq 0.$$

4. Niz znamenaka 1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, ... konstruira se tako da je svaki broj, počevši od petog, jednak znamenki jedinica zbroja prethodne četiri znamenke.

a) Da li se u tom nizu redom pojavljuju znamenke 2, 0, 0, 4, tim redom?

b) Da li se u tom nizu ikad ponavljaju početne znamenke 1, 2, 3, 4, tim redom?

Rješenja za I. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Transformirajmo najprije dani sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}(x-y)(x+y) &= 2(x+y)(z+1),\\ (y-z)(y+z) &= 2(y+z)(x+1),\\ (z-x)(z+x) &= 2(z+x)(y+1),\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y-2z-2) &= 0,\\ (y+z)(y-z-2x-2) &= 0,\\ (z+x)(z-x-2y-2) &= 0.\end{aligned}$$

Sada imamo ova četiri slučaja:

1° Za $x+y=y+z=z+x=0$ je $x=y=z=0$ i rješenje je $(x,y,z)=(0,0,0)$.

2° Za $x+y\neq 0$, tj. $x-y-2z-2=0$ i $y+z=z+x=0$ dobivamo $z=-1$, $x=y=1$. Uzimajući još dva preostala analogna slučaja, dobivaju se rješenja

$$(x,y,z)\in\{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}.$$

3° Za $x+y\neq 0$, tj. $x-y-2z-2=0$, $y+z\neq 0$, tj. $y-z-2x-2=0$ i $z+x=0$ dobivamo $x=2$, $y=4$, $z=-2$. Iz preostala dva slučaja dobivaju se rješenja

$$(x,y,z)\in\{(2,4,-2),(-2,2,4),(4,-2,2)\}.$$

4° Za $x+y\neq 0$, $y+z\neq 0$ i $z+x\neq 0$ dobivamo sustav linearnih jednadžbi

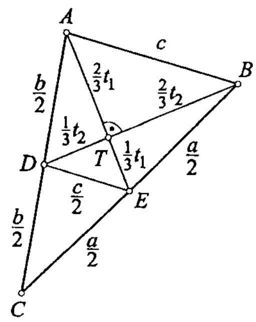
$$\begin{aligned}x-y-2z-2 &= 0,\\ y-z-2x-2 &= 0,\\ z-x-2y-2 &= 0,\end{aligned}$$

čije rješenje je $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$

2. 1° Pretpostavimo najprije da su težišnice t_1 i t_2 iz vrhova A i B okomite. Tada je iz pravokutnih trokuta ADT, BET i ABT:

$$\begin{aligned}\frac{4}{9}t_1^2+\frac{1}{9}t_2^2 &= \frac{1}{4}b^2,\\ \frac{1}{9}t_1^2+\frac{4}{9}t_2^2 &= \frac{1}{4}a^2,\\ \frac{4}{9}(t_1^2+t_2^2) &= c^2.\end{aligned}$$

Zbrojimo li prve dvije jednakosti i usporedimo zbroj s trećom, dobivamo traženu jednakost $a^2 + b^2 = 5c^2$.



2° Pretpostavimo sada da vrijedi jednakost $a^2+b^2 = 5c^2$. Nadalje, pretpostavimo da je $\sphericalangle ATD > 90°$ (analogno se promatra slučaj $\sphericalangle ATD < 90°$). Tada je i $\sphericalangle BTE > 90°$, pa iz trokuta ADT i BET zaključujemo

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}t_1^2 + \frac{1}{9}t_2^2 &< \frac{1}{4}b^2, \\ \frac{1}{9}t_1^2 + \frac{4}{9}t_2^2 &< \frac{1}{4}a^2. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobiva se

$$\frac{5}{9}(t_1^2 + t_2^2) < \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{5c^2}{4}, \quad \text{tj.} \quad \frac{4}{9}(t_1^2 + t_2^2) < c^2. \tag{$*$}$$

S druge strane, kako je $\sphericalangle ATB < 90°$, vrijedi

$$\frac{4t_1^2}{9} + \frac{4t_2^2}{9} > c^2,$$

što je u suprotnosti sa $(*)$. Dakle, težišnice t_1 i t_2 su okomite.

3. *Prvo rješenje.* Označimo s

$$f(x, y, z) = |x| + |y| + |z| - |x + y| - |y + z| - |z + x| + |x + y + z|.$$

S obzirom da je $f(-x, -y, -z) = f(x, y, z)$ i f se ne mijenja zamjenom varijabli, dovoljno je promatrati sljedećih pet slučajeva:

1° Za $x \geq y \geq z \geq 0$ je

$$f(x, y, z) = x + y + z - (x + y) - (y + z) - (z + x) + x + y + z = 0;$$

2° Za $x \geq y \geq -z \geq 0$ je

$$f(x, y, z) = x + y - z - (x + y) - (y + z) - (z + x) + x + y + z = -2z \geq 0;$$

3° Za $x \geq -z \geq y \geq 0$ je

$$f(x, y, z) = x + y - z - (x + y) + (y + z) - (z + x) + x + y + z = 2y \geq 0;$$

4° Za $-z \geq x \geq y \geq 0, \quad x + y + z \geq 0$ je

$$f(x, y, z) = x + y - z - (x + y) + (y + z) + (z + x) + x + y + z = 2x + 2y + 2z \geq 0;$$

5° Za $-z \geq x \geq y \geq 0, \quad x+y+z \leq 0$ je

$$f(x,y,z) = x+y-z-(x+y)+(y+z)+(z+x)-(x+y+z) = 0.$$

Drugo rešenje. Neka je z po apsolutnoj vrijednosti najveći od danih brojeva. Nejednakost je očita za $z=0$. Ako je $z \neq 0$, dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\left|\frac{x}{z}\right| + \left|\frac{y}{z}\right| + 1 - \left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right| - \left|\frac{y}{z}+1\right| - \left|1+\frac{x}{z}\right| + \left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right| \geq 0.$$

Primijetimo da je $-1 \leq \dfrac{x}{z} \leq 1$ i $-1 \leq \dfrac{y}{z} \leq 1$, odakle je $1+\dfrac{x}{z} \geq 0$ i $1+\dfrac{y}{z} \geq 0$. Sada je

$$\left|\frac{x}{z}\right| + \left|\frac{y}{z}\right| - \left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right| - \left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right) + \left|\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right| \geq 0.$$

Zbroj prva tri člana je nenegativan, jer vrijedi nejednakost trokuta $|a+b| \leq |a|+|b|$, a zbroj zadnja dva člana je nenegativan, jer broj nikad nije veći od svoje apsolutne vrijednosti.

4. a) Označimo s P paran i s N neparan broj u nizu. Tada danom nizu pripada sljedeći niz

NPN**PPNPN**PP...

Primijetimo da se označena petorka periodički ponavlja, štoviše, zbog danog rasporeda P i N svaka četvorka uzastopnih znamenaka sadrži bar jednu neparnu znamenku. Kako u četvorci brojeva 2, 0, 0, 4 nema nijedne neparne znamenke, ona se ne može pojaviti u nizu.

b) Jasno je da niz možemo nastaviti od bilo kojeg mjesta ako znamo posljednje četiri uzastopne znamenke, a isto tako ga možemo jednoznačno rekonstruirati unatrag.

Kako kombinacija od četiri znamenke ima konačno mnogo (sigurno manje od 10 000), doći će do ponavljanja, tj. neke četiri uzastopne znamenke $abcd$ će se ponoviti. Između ta dva ponavljanja mora se ponoviti četvorka 1234. U protivnom u rekonstrukciji unatrag između dva pojavljivanja $abcd$ ne bismo naišli na četvorku 1234, a na koji moramo naići na početku niza.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

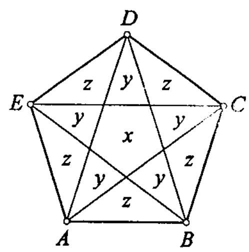
MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Trogir, 5. – 8. svibnja 2004. godine

II. razred

1. Pojedini dijelovi pravilnog peterokuta $ABCDE$ imaju površine označene sa x, y, z kao na slici. Ako je zadana površina x, nađite površine y i z, te površinu cijelog peterokuta.



2. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

3. Brojevi (p_n) za $n \in \mathbf{N}$ definirani su na sljedeći način:

$p_1 = 2$ i za $n \geq 2$, p_n je najveći prosti djelitelj od $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} + 1$. Dokažite da je $p_n \neq 5$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

4. Žaba skače po točkama koordinatne mreže počevši od točke $(1,1)$ po sljedećim pravilima:

(i) iz točke (a,b) žaba smije skočiti u točku $(2a,b)$, odnosno $(a,2b)$;

(ii) ako je $a > b$, žaba smije skočiti iz (a,b) u $(a-b,b)$, a ako je $a < b$, žaba smije skočiti iz (a,b) u $(a,b-a)$.

Da li žaba može stići u točku

(a) $(24,40)$,

(b) $(40,60)$,

(c) $(24,60)$,

(d) $(200,4)$?

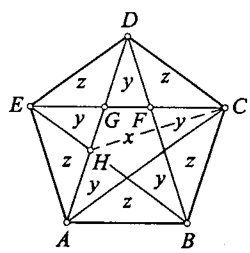
Rješenja za II. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Neka je G sjecište dijagonala $\overline{EC}$ i $\overline{AD}$ (vidi sliku). Vrijede jednakosti

$$\begin{aligned}\frac{|EG|}{|GC|} &= \frac{P(EGD)}{P(GCD)} = \frac{z}{y+z} \\ &= \frac{P(EGA)}{P(GCA)} = \frac{y+z}{x+2y} \\ &= \frac{P(EGH)}{P(GCH)} = \frac{2y}{x+y},\end{aligned}$$

pa dobivamo

$$\frac{z}{y+z} = \frac{y+z}{x+2y} = \frac{2y}{x+y}.$$



Slijedi

$$(y+z)^2 = (x+2y)z, \quad \text{tj.} \quad y^2 + z^2 = xz, \tag{1}$$

$$z(x+y) = 2y(y+z), \quad \text{tj.} \quad 2y^2 + yz = xz. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi $y^2 + yz - z^2 = 0$, odakle dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$\left(\frac{y}{z}\right)^2 + \frac{y}{z} - 1 = 0$$

čije je pozitivno rješenje

$$\frac{y}{z} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1). \tag{3}$$

Iz (3) i (1) dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{x}{z} &= 1 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}), \\ \frac{z}{x} &= \frac{5 + \sqrt{5}}{10}, \\ \frac{y}{x} &= \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = \frac{\sqrt{5}}{5},\end{aligned}$$

tj. vrijedi

$$y = \frac{\sqrt{5}}{5}x, \quad z = \frac{5+\sqrt{5}}{10}x.$$

Površina peterokuta $ABCDE$ je

$$P = x + 5y + 5z = x + \sqrt{5}x + \frac{5+\sqrt{5}}{2}x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}x.$$

2. Nakon svođenja na zajednički nazivnik dobiva se ekvivalentna nejednakost

$$\begin{aligned} &\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ = &\frac{a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b}{2abc+a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

tj.

$$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b-6abc \geq 0.$$

Grupiranjem dobivamo

$$(b^2a+c^2a-2abc)+(a^2b+c^2b-2abc)+(a^2c+b^2c-2abc) \geq 0,$$

odnosno

$$a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2 \geq 0.$$

Kako je ova nejednakost ispunjena za a, b, $c \geq 0$, vrijedi i polazna nejednakost.

3. Kako je $p_1 = 2$, p_2 je najveći prosti djelitelj od p_1+1, tj. $p_2 = 3$. Također, za $k > 1$ je p_k najveći prosti djelitelj od $p_1p_2\cdots p_{k-1}+1$ pa je $p_k > 2$, jer je $p_1p_2\cdots p_{k-1}+1$ neparan broj.

Pretpostavimo da je $p_n = 5$, za neki n. Tada je $p_1p_2\ldots p_{n-1}+1 = 3^r5^s$, jer je $p_1p_2\cdots p_{n-1}+1$ neparan i 5 je njegov najveći djelitelj.

Nadalje, kako je $p_2 = 3$, $p_1p_2\cdots p_{n-1}+1$ nije djeljivo s 3, pa je $r = 0$, tj. $p_1p_2\cdots p_{n-1}+1 = 5^s$. Zato je

$$\begin{aligned} p_1p_2p_3\cdots p_{n-1} &= 5^s-1 \\ &= (5-1)(5^{s-1}+5^{s-2}+\ldots+5+1). \end{aligned}$$

Ovdje je desna strana djeljiva s 4, ali lijeva nije jer je $p_2\ldots p_{n-1}$ produkt neparnih prostih brojeva. Zbog dobivene proturječnosti zaključujemo da je $p_n \neq 5$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

4. a) Odgovor je DA, što pokazuje ovaj primjer:

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & (1,1) & \to & (2,1) & \to & (4,1) & \to & (3,1) & \to & (3,2) \\
\to & (3,4) & \to & (3,8) & \to & (3,5) & \to & (6,5) & \to & (12,5) \\
\to & (24,5) & \to & (24,10) & \to & (24,20) & \to & (24,40). & &
\end{array}
$$

Pod b) i c) odgovor je NE. Niti potezom (i) niti potezom (ii) ne možemo doći u točku (x, y) takvu da x i y imaju zajednički neparni djelitelj (veći od 1). Kako su 40 i 60 djeljivi s 5, a 24 i 60 su djeljivi s 3, a krećemo iz točke $(1,1)$, ne može se doći niti u točku $(40,60)$ niti u točku $(24,60)$.

d) Odgovor je DA. Na primjer,

$$
\begin{array}{lllllllllll}
(1,1) & \to & (2,1) & \to & (4,1) & \to & (8,1) & \to & (16,1) & \to \dots \to & (64,1) \\
 & \to & (63,1) & \to & (62,1) & \to & (61,1) & \to & (60,1) & \to \dots \to & (50,1) \\
 & \to & (50,2) & \to & (50,4) & \to & (100,4) & \to & (200,4). & &
\end{array}
$$

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Trogir, 5. – 8. svibnja 2004. godine

III. razred

1. Neka je $ABCD$ kvadrat i P točka na kružnici opisanoj kvadratu na luku $\widehat{AB}$ koji ne sadrži točku C. Koje vrijednosti može poprimiti izraz

$$\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}?$$

2. Dokažite da u svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$\frac{\cos\alpha}{a^3} + \frac{\cos\beta}{b^3} + \frac{\cos\gamma}{c^3} \geq \frac{3}{2abc},$$

pri čemu su a, b, c duljine stranica trokuta, te α, β, γ odgovarajući kutovi.

3. Visine trostrane piramide sijeku se u jednoj točki. Dokažite da ta točka, težište jedne strane piramide, nožište visine na tu stranu i tri točke koje dijele preostale tri visine u omjeru $2:1$, počevši od vrha piramide, leže na istoj sferi.

4. Konačan broj polja beskonačne kvadratne mreže obojen je crnom bojom. Dokažite da je u toj ravnini moguće odabrati konačno mnogo kvadrata koji zadovoljavaju svaki od sljedećih uvjeta:

   (i) Unutrašnjosti svaka dva različita kvadrata su disjunktne (imaju prazan presjek).

   (ii) Svako crno obojeno polje leži u nekom od tih kvadrata.

   (iii) Površina crnih polja u svakom od odabranih kvadrata je barem $\frac{1}{5}$, a najviše $\frac{4}{5}$ površine tog kvadrata.

Rješenja za III. razred

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

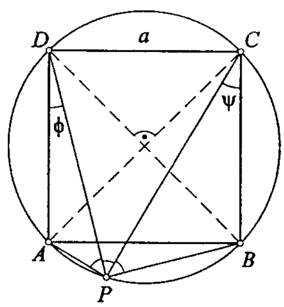
1. Neka je

$$k = \frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}.$$

Za $P = A$ ili $P = B$ dobiva se $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$

Pretpostavimo sada da je P unutarnja točka luka $\widehat{AB}$. Kako lukovima jednake duljine pripadaju jednaki kutovi, imamo

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle DPC = \sphericalangle CPB = \sphericalangle CAB = \frac{\pi}{4}.$$



Označimo s a duljinu stranice kvadrata, te $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $\phi = \sphericalangle PDA$ i $\psi = \sphericalangle BCP$. Tada je $\phi + \psi = \alpha$, $\sphericalangle PBC = \pi - (\alpha + \psi)$, $\sphericalangle DAP = \pi - (\alpha + \phi)$. Primjenom poučka o sinusima na trokute APD i BPC slijedi:

$$k = \frac{\sqrt{2}a(\sin\phi + \sin\psi)}{\sqrt{2}a(\sin(\alpha+\psi) + \sin(\alpha+\phi))} = \frac{2\sin\frac{\phi+\psi}{2}\cos\frac{\phi-\psi}{2}}{2\sin\frac{2\alpha+\phi+\psi}{2}\cos\frac{\phi-\psi}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \text{konst.}$$

To pokazuje da je k konstantno i za $\alpha = \frac{\pi}{4}$ dobiva se $k = \sqrt{2} - 1$, što se lako vidi iz identiteta

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{3}{2}\alpha &= \sin\alpha\cos\tfrac{\alpha}{2} + \cos\alpha\sin\tfrac{\alpha}{2} \\
&= 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos^2\tfrac{\alpha}{2} + \sin\tfrac{\alpha}{2}\left(1 - 2\sin^2\tfrac{\alpha}{2}\right) \\
&= \sin\tfrac{\alpha}{2}\left(2\cos^2\tfrac{\alpha}{2} + 1 - 2\sin^2\tfrac{\alpha}{2}\right) = \sin\tfrac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha),
\end{aligned}$$

gdje je $1 + 2\cos\alpha = 1 + \sqrt{2}$.

Drugo rješenje. Neka je a duljina stranice kvadrata. Prema Ptolemejevom teoremu za četverokute $APBC$ i $APBD$ imamo:

$$\begin{aligned}
|CP| \cdot a &= |AP| \cdot a + |BP| \cdot a\sqrt{2}, \\
|DP| \cdot a &= |BP| \cdot a + |AP| \cdot a\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

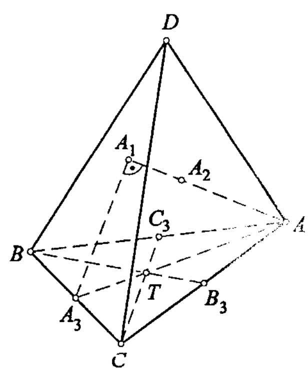
Zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}(|CP|+|DP|)\cdot a &= (|AP|+|BP|)(a+a\sqrt{2})\\ \frac{|AP|+|BP|}{|CP|+|DP|} &= \sqrt{2}-1.\end{aligned}$$

2. Kristeći kosinusov poučak i nejednakost $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ za $x>0$ imamo

$$\begin{aligned}&\frac{\cos\alpha}{a^3}+\frac{\cos\beta}{b^3}+\frac{\cos\gamma}{c^3}\\ =\ &\frac{b^2+c^2-a^2}{2a^3bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2b^3ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2c^3ab}\\ =\ &\frac{1}{2abc}\left[\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)-3\right]\\ \geq\ &\frac{1}{2abc}(2+2+2-3)=\frac{3}{2abc}.\end{aligned}$$

3. Neka su $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$ visine tetraedra, H točka njihovog presjeka, A_2, B_2, C_2 točke koje dijele visine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ u omjeru $2:1$, T težište trokuta ABC, $\overline{AA_3}$, $\overline{BB_3}$, $\overline{CC_3}$ njegove težišnice.



Dokazat ćemo da su točke T, A_2, B_2, C_2, D_1, H na sferi promjera $\overline{TH}$. Drugim riječima, dovoljno je dokazati da je:

1° $TA_2 \perp A_2H = AA_1$,

2° $TB_2 \perp B_2H = BB_1$,

3° $TC_2 \perp C_2H = CC_1$,

4° $TD_1 \perp D_1H = DD_1$.

Posljednja tvrdnja je očita jer je TD_1 u ravnini baze ABC, a DD_1 je visina na tu bazu.

Kako su prve tri tvrdnje analogne, dovoljno je dokazati prvu od njih.

Trokuti TAA_2 i A_3AA_1 su slični jer imaju zajednički kut i vrijedi $\dfrac{|AA_2|}{|AA_1|}=\dfrac{|AT|}{|AA_3|}=\dfrac{2}{3}$. Stoga je $\sphericalangle AA_2T=\sphericalangle AA_1A_3=90°$. Slijedi, $AA_1=AA_2\perp A_2T$. Time je 1° dokazano.

4. Riječ 'kvadrat' u ovom rješenju znači kvadrat čije su stranice bridovi dane kvadratne mreže. Također pretpostavljamo da svako polje mreže ima stranicu duljine 1. Broj crnih kvadratića je konačan pa postoji neki kvadrat stranice duljine 2^n (za dovoljno veliki n) u kojem leže sva crna polja, a površina njegovog crnog dijela nije veća od $\frac{4}{5}$ ukupne površine tog kvadrata. Kvadrate iz zadatka biramo postupno i to na sljedeći način. Najprije se usredotočimo na gore spomenuti kvadrat.

1° Ako površina crnog dijela nije manja od $\frac{1}{5}$ ukupne površine dotičnog kvadrata, onda odaberemo taj kvadrat.

2° Ako je površina crnog dijela jednaka 0, tj. unutar kvadrata uopće nema crnih polja, onda taj kvadrat više ne promatramo.

3° Ako crni dio kvadrata ima površinu pozitivnu i manju od $\frac{1}{5}$ površine cijelog kvadrata, tada podijelimo taj kvadrat na četiri manja. Za svaki od tih manjih kvadrata vrijedi da je najviše $\frac{4}{5}$ njegove površine obojano u crno. (Naime, kad bi neki od manjih kvadrata imao više od $\frac{4}{5}$ crne površine, onda bi u velikom kvadratu bilo više od $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ crne površine, što je protivno pretpostavci ovog slučaja.) Zato za svaki od četiri manja kvadrata možemo ponoviti gornji postupak.

Jasno je da cijeli postupak završava nakon konačno mnogo koraka (jer je za kvadrat stranice 1 moguć jedino drugi slučaj) i da on odabire kvadrate koji ispunjavaju sve zadane uvjete.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Trogir, 5. – 8. svibnja 2004. godine

IV. razred

1. Neka je n prirodan broj i neka su z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n kompleksni brojevi takvi da za svaki izbor brojeva $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ iz skupa $\{-1, 1\}$ vrijedi

$$|\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n| \leq |\varepsilon_1 w_1 + \ldots + \varepsilon_n w_n|.$$

Dokažite da je

$$|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 \leq |w_1|^2 + \ldots + |w_n|^2.$$

2. Unutar trokuta ABC s duljinama stranica a, b, c i odgovarajućim kutovima α, β, γ postoje točke P i Q takve da vrijedi

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPA = \sphericalangle APB = 120^\circ,$$

$$\sphericalangle BQC = 60^\circ + \alpha, \quad \sphericalangle CQA = 60^\circ + \beta, \quad \sphericalangle AQB = 60^\circ + \gamma.$$

Dokažite da vrijedi jednakost

$$(|AP| + |BP| + |CP|)^3 \cdot |AQ| \cdot |BQ| \cdot |CQ| = (abc)^2.$$

3. Nizovi realnih brojeva (x_n), (y_n), (z_n), $n \in \mathbf{N}$, definirani su formulama

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, \quad z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1},$$

a početni članovi su $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ i z_1 takav da vrijedi $x_1 y_1 z_1 = x_1 + y_1 + z_1$.

a) Provjerite da su za svaki $n \in \mathbf{N}$ zadovoljeni uvjeti: $x_n^2 \neq 1$, $y_n^2 \neq 1$, $z_n^2 \neq 1$.

b) Da li postoji $k \in \mathbf{N}$ takav da je $x_k + y_k + z_k = 0$?

4. Odredite sve realne brojeve α sa svojstvom da su svi brojevi u nizu

$$\cos\alpha, \ \cos 2\alpha, \ \cos 2^2\alpha, \ \ldots, \ \cos 2^n\alpha, \ \ldots$$

negativni.

Rješenja za IV. razred

Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

1. Izraze $|\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n|^2$ ćemo prosumirati po svim varijacijama predznaka $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. (To je 2^n pribrojnika.) Tvrdimo da za $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ vrijedi

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} |\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n|^2 = 2^n \cdot (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2).$$

Ovu tvrdnju možemo dokazati matematičkom indukcijom po $n \in \mathbf{N}$ koristeći činjenicu da za $u, v \in \mathbf{C}$ vrijedi jednakost paralelograma

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da ona vrijedi za neki $n - 1 \in \mathbf{N}$. Dokažimo da vrijedi i za n. Imamo:

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} |\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} z_{n-1} + \varepsilon_n z_n|^2$$

$$= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}\in\{-1,1\}} (|\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} z_{n-1} + z_n|^2 + |\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} z_{n-1} - z_n|^2)$$

$$= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}\in\{-1,1\}} (2|\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} z_{n-1}|^2 + 2|z_n|^2)$$

$$= 2 \cdot \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}\in\{-1,1\}} |\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} z_{n-1}|^2 + 2^n \cdot |z_n|^2$$

$$= \text{pretpostavka indukcije} = 2 \cdot 2^{n-1}(|z_1|^2 + \ldots + |z_{n-1}|^2) + 2^n \cdot |z_n|^2$$

$$= 2^n \cdot (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2).$$

Time je gornja tvrdnja dokazana.

Za rješenje zadatka treba prosumirati nejednakosti

$$|\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n|^2 \le |\varepsilon_1 w_1 + \ldots + \varepsilon_n w_n|^2.$$

po svim izborima $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Na taj način dobivamo

$$2^n(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2) \le 2^n(|w_1|^2 + \ldots + |w_n|^2).$$

Napomena. Umjesto matematičkom indukcijom pomoćnu tvrdnju smo mogli dokazati i direktno:

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} |\varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_n z_n|^2$$

$$= \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \varepsilon_k z_k \bar{\varepsilon}_l \bar{z}_l$$

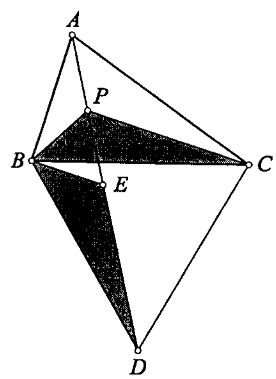
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} \varepsilon_k \varepsilon_l \right) z_k \bar{z}_l = 2^n \cdot \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2$$

jer za $k \neq l$ imamo

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}} \varepsilon_k\varepsilon_l &= 2^{n-2}\sum_{\varepsilon_k,\,\varepsilon_l\in\{-1,1\}}\varepsilon_k\varepsilon_l \\ &= 2^{n-2}[(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 1]=0,\end{aligned}$$

a za $k = l$ je gornja suma jednaka 2^n.

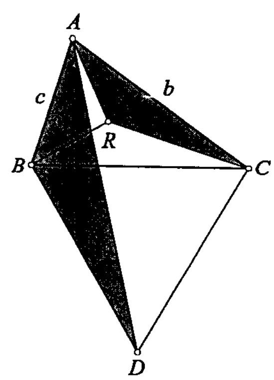
2. Nad stranicom $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirajmo izvana jednakostranični trokut CBD. Neka je E točka ravnine takva da su trokuti BDE i BCP sukladni i jednako orijentirani.



Radi $|BP| = |BE|$ i $\sphericalangle PBE = 60°$ je trokut BEP jednakostraničan. Iz $\sphericalangle APB + \sphericalangle BPE = 120° + 60° = 180°$ i $\sphericalangle PEB + \sphericalangle BED = 60° + 120° = 180°$ slijedi kolinearnost točaka A, P, E, D. Osim toga je

$$|AP| + |BP| + |CP| = |AP| + |PE| + |ED| = |AD|. \tag{1}$$

Neka je R točka unutar trokuta ABC takva da su trokuti ARC i ABD slični, tj. takva da je $\sphericalangle RAC = \sphericalangle BAD < \alpha$ i $\sphericalangle RCA = \sphericalangle BDA = \sphericalangle BCP < \gamma$.



Iz sličnosti trokuta RAC i BAD je

$$\frac{|AR|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|}. \tag{2}$$

Nadalje su zbog $\sphericalangle RAB = \sphericalangle CAD$ i $\dfrac{|AR|}{|AB|} = \dfrac{|AC|}{|AD|}$ trokuti ABR i ADC slični pa je $\sphericalangle ARB = \sphericalangle ACD = 60° + \gamma$. Sada iz $\sphericalangle ARB = 60° + \gamma = \sphericalangle AQB$ i $\sphericalangle ARC = \sphericalangle ABD = 60° + \beta = \sphericalangle AQC$ slijedi $R = Q$. (Naime, po teoremu o obodnom kutu, točka Q leži na kružnicama opisanim trokutima ABR i ARC.)

Iz (1), (2) i $R = Q$ dobivamo

$$\frac{|AQ|}{b} = \frac{c}{|AP| + |BP| + |CP|}, \quad \text{tj.} \quad (|AP| + |BP| + |CP|) \cdot |AQ| = bc,$$

a analogno se dokazuju i jednakosti

$$(|AP| + |BP| + |CP|) \cdot |BQ| = ca, \quad (|AP| + |BP| + |CP|) \cdot |CQ| = ab.$$

Konačno, njihovim množenjem slijedi

$$(|AP| + |BP| + |CP|)^3 \cdot |AQ| \cdot |BQ| \cdot |CQ| = (abc)^2.$$

3. Iz dane jednadžbe dobije se $z_1 = \frac{6}{7}$.

a) Pretpostavimo suprotno, tj. da je npr. $x_n = 1$.

Označimo $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = (a, b, c)$ i $(x_n, y_n, z_n) = (A, B, C)$. Pri tome su a, b, c, A, B, C racionalni brojevi. Tada iz $|A| = 1$ tj. $A = \pm 1$ i $\frac{2a}{a^2 - 1} = \pm 1$ slijedi, a je rješenje jednadžbe

$$a^2 - 2a - 1 = 0 \qquad \text{ili} \qquad a^2 + 2a - 1 = 0.$$

Međutim, nijedna od njih nema racionalno rješenje, dok bi po konstrukciji, a morao biti racionalan broj. Zato je pretpostavka bila pogrešna, tj. ne može biti $x_n = 1$, $y_n = 1$ ili $z_n = 1$.

b) Odgovor je NE! Nakon računa se dobije da ako (a, b, c) ima svojstvo $a + b + c = abc$ onda je i

$$\frac{2a}{a^2 - 1} + \frac{2b}{b^2 - 1} + \frac{2c}{c^2 - 1} = \frac{2a}{a^2 - 1} \cdot \frac{2b}{b^2 - 1} \cdot \frac{2c}{c^2 - 1}.$$

To je posljedica jednakosti

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{a^2 - 1} + \frac{2b}{b^2 - 1} + \frac{2c}{c^2 - 1} - \frac{2a}{a^2 - 1} \cdot \frac{2b}{b^2 - 1} \cdot \frac{2c}{c^2 - 1} \\ = \ & \frac{2(abc - a - b - c)(ab + bc + ca - 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Budući da je $x_1 + y_1 + z_1 = x_1 y_1 z_1$, zaključujemo da bi iz $x_n + y_n + z_n = 0$ slijedilo $x_n y_n z_n = 0$, što nije moguće.

4. *Prvo rješenje.* Imamo:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \cos 4\alpha &= 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 \ = \ 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1 < 0. \end{aligned}$$

Za nejednadžbu $8t^4 - 8t^2 + 1 < 0$ je $\frac{2 - \sqrt{2}}{4} < t^2 < \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. Zbog danog uvjeta je $\cos\alpha = t < -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = -0.38\ldots < -\frac{1}{3}$.

Sada je

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha + \frac{1}{2} &= 2\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\right),\\
\left|\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right| &\geq \frac{5}{3}\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right|,\\
\left|\cos 2^n\alpha + \frac{1}{2}\right| &\geq \frac{5}{3}\left|\cos 2^{n-1}\alpha + \frac{1}{2}\right| \geq \ldots \geq \left(\frac{5}{3}\right)^n\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right|.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi,

$$\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

odnosno

$$\cos\alpha + \frac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Drugo rješenje. Zbog 2π-perodičnosti je dovoljno naći sve $\alpha \in [0, 2\pi\rangle$ koji zadovoljavaju uvjete zadatka.

Broj $\frac{\alpha}{2\pi}$ ne može biti dijadski razlomak, tj. oblika $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{m}{2^n}$ za neke m, $n \in \mathbf{N}_0$, jer bi tada bilo $\cos(2^n\alpha) = \cos(2m\pi) = 1 > 0$.

Svaki broj iz $[0, 1\rangle$ koji nije dijadski razlomak može se na jedinstveni način zapisati u binarnom obliku. Neka je

$$\frac{\alpha}{2\pi} = 0.b_1b_2b_3\ldots b_nb_{n+1}\ldots \tag{$*$}$$

binarni prikaz broja $\frac{\alpha}{2\pi}$. Tada je

$$\frac{2^n\alpha}{2\pi} = b_1b_2b_3\ldots b_n.b_{n+1}b_{n+2}\ldots,$$

$$\begin{aligned}
\cos(2^n\alpha) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2^n\alpha \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle 2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right\rangle\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2^n\alpha}{2\pi} \in \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left\langle k + \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Odavde se vidi da za svaki $n \in \mathbf{N}_0$ mora biti

$$b_{n+1} = 0, \quad b_{n+2} = 1 \qquad \text{ili} \qquad b_{n+1} = 1, \quad b_{n+2} = 0.$$

Zato su u prikazu $(*)$ svake dvije susjedne znamenke različite, što se svodi na

$$\frac{\alpha}{2\pi} = 0.010101\ldots \qquad \text{ili} \qquad \frac{\alpha}{2\pi} = 0.101010\ldots$$

tj.

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \qquad \text{ili} \qquad \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

pa su rješenja $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ i $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.