MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 2004.

I. razred

1. Dana je funkcija $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$, za koju vrijedi:

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \qquad \text{za svaki } x \in \mathbf{Z}.$$

Ako je $f(1) = 2$, odredite $f(2004)$.

2. U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$. Na kateti $\overline{BC}$ odabrana je točka E tako da je $|CE| = \frac{1}{2}|BD|$, a na dužini $\overline{AE}$ točka F tako da je $|EF| = |CE|$. Dokažite da je $|AF| = |AD|$

3. Dokažite da je

$$\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$$

cijeli broj i odredite ga.

4. Odredite sva realna rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2004} &= 2004, \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2004}^4 &= x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2004}^3. \end{aligned}$$

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Koristeći svojstvo funkcije,

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \qquad \text{za } x \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

i početni uvjet

$$f(1) = 2, \tag{2}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
f(2) &= \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3\,, \\
f(3) &= \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{2}\,, \\
f(4) &= \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3}\,, \\
f(5) &= \frac{1+f(4)}{1-f(4)} = 2 = f(1)\,, \\
f(6) &= \frac{1+f(5)}{1-f(5)} = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = -3 = f(2)\,, \\
f(7) &= \frac{1+f(6)}{1-f(6)} = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = -\frac{1}{2} = f(3)\,, \\
f(8) &= \frac{1+f(7)}{1-f(7)} = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1}{3} = f(4)\,,
\end{aligned}$$

Odavde slijedi $f(n+4) = f(n)$ za $n \in \mathbf{N}$. 15 bodova

Konačno je

$$f(2004) = f(2000) = f(1996) = \ldots = f(4) = \frac{1}{3}\,.$$ 10 bodova

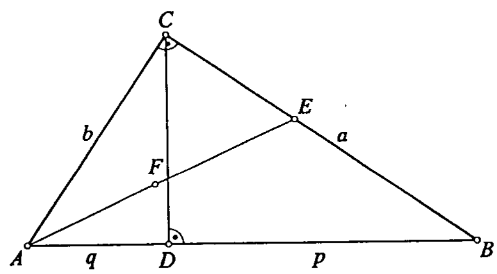
Drugo rješenje. Za prirodan broj n i danu funkciju f vrijedi:

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= \frac{1+f(n)}{1-f(n)}\,, \\
f(n+2) &= \frac{1+f(n+1)}{1-f(n+1)} = \frac{1+\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}}{1-\dfrac{1+f(n)}{1-f(n)}} = -\frac{1}{f(n)}\,, \\
f(n+4) &= -\frac{1}{f(n+2)} = f(n)\,.
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija f ima svojstvo $f(n+4) = f(n)$. 15 bodova

Sada je $f(2004) = f(2000) = f(1996) = \ldots = f(4) = \frac{1}{3}$. 10 bodova

2.



Označimo li $|BD| = p$ i $|AD| = q$, tada je $p + q = |AB| = c$.
Prema Euklidovom poučku je $|CA| = b = \sqrt{cq}$. 5 bodova
Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutan trokut AEC dobit ćemo:

$$|AE|^2 = |CA|^2 + |CE|^2 \quad \text{ili} \quad (|AF| + |EF|)^2 = b^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 .$$ 5 bodova

Odavde je

$$\left(|AF| + \frac{p}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{p^2}{4}, \quad |AF|(|AF| + p) = qc\,, \quad \text{tj.}$$

$$|AF|(|AF| + p) = q(q + p)\,.$$ 10 bodova

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da je $|AF| = q$, tj. $|AF| = |AD|$. 5 bodova

3. *Prvo rješenje.* Stavimo $a = \sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} + \sqrt[3]{26}$. Imamo

$$\sqrt[3]{1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2}} = a - \sqrt[3]{26}, \quad \text{tj.}$$

$$\begin{aligned} 1 - 27\sqrt[3]{26} + 9\sqrt[3]{26^2} &= (a - \sqrt[3]{26})^3 \\ &= (a^3 - 26) - 3a^2\sqrt[3]{26} + 3a\sqrt[3]{26^2}\,. \end{aligned}$$

10 bodova

Odavde slijedi

$$a^3 - 26 = 1, \quad -3a^2 = -27, \quad 3a = 9\,.$$

Ovaj sustav jednadžbi je zadovoljen samo za $a = 3$. Prema tome, dani broj je jednak 3. 15 bodova

Drugo rješenje. Možemo transformirati izraz pod korijenom:

$$
\begin{aligned}
& \sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26} \\
= \ & \sqrt[3]{3^3-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}-\sqrt[3]{26^3}}+\sqrt[3]{26} \\
= \ & \sqrt[3]{(3-\sqrt[3]{26})^3}+\sqrt[3]{26} \ = \ 3-\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{26} \ = \ 3 \, .
\end{aligned}
$$

25 bodova

4. Iz prve i druge jednadžbe sređivanjem dobivamo

$$
\begin{aligned}
& (x_1-1)+(x_2-1)+\ldots+(x_{2004}-1) \ = \ 0 \\
= \ & x_1^3(x_1-1)+x_2^3(x_2-1)+\ldots+x_{2004}^3(x_{2004}-1) \, ,
\end{aligned}
$$

odnosno,

$$
\begin{aligned}
(x_1^3-1)(x_1-1)+\ldots+(x_{2004}^3-1)(x_{2004}-1) &= 0 \, , \\
(x_1-1)^2(x_1^2+x_1+1)+\ldots+(x_{2004}-1)^2(x_{2004}^2+x_{2004}+1) &= 0 \, .
\end{aligned}
$$

Kako je $x_i^2+x_i+1=\left(x_i+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ za $i=1,2,\ldots,2004$,
dobivamo jedino moguće rješenje $x_1=x_2=\ldots=x_{2004}=1$. 25 bodova

Za pogođeno rješenje, bez dokaza da je to jedino rješenje, 5 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 2004.

II. razred

1. Ako su duljine dviju visina trokuta 10 i 6, dokažite da je duljina treće manja od 15.

2. Dokažite da su za svaki prirodan broj n rješenja kvadratne jednadžbe

$$2nx^2 - 2(n^2+1)x - n^2 - 1 = 0 ,$$

iracionalni brojevi.

3. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.

4. Trokut ABC je jednakokračan ($|AB| = |AC|$) a točka D je na onom luku $\overset{\frown}{BC}$ trokutu opisane kružnice koji ne sadrži vrh A. Nadalje, točka E je sjecište pravca CD i okomice iz vrha A na taj pravac. Dokažite da vrijedi:

$$|BD| + |DC| = 2\,|DE|.$$

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Neka su a, b i c duljine stranica trokuta, a h_a, h_b i h_c njegove visine. Tada je

$$2P = ah_a = bh_b = ch_c\,. \qquad (1)$$ 5 bodova

Možemo uzeti $h_a = 10$ i $h_b = 6$. Treba dokazati da je $h_c < 15$.

Iz (1) dobivamo $b = \dfrac{ah_a}{h_b} = \dfrac{5}{3}a$. 5 bodova

Iz nejednakosti trokuta slijedi

$$\begin{aligned} b - a &< c, \\ \frac{2}{3}a &< c, \\ \frac{a}{c} &< \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

5 bodova

Iz $\dfrac{a}{c} = \dfrac{h_c}{h_a}$ slijedi $\dfrac{h_c}{10} < \dfrac{3}{2}$, odnosno $h_c < 15$. 10 bodova

2. Diskriminanta kvadratne jednadžbe je

$$\begin{aligned} D &= 4(n^2+1)^2 + 8n(n^2+1) \\ &= 4(n^2+1)(n^2+2n+1) \\ &= 4(n+1)^2(n^2+1) > 0\,, \end{aligned}$$

što znači da su njezina rješenja realna. 5 bodova

Tvrdimo da $\sqrt{D}$ nije racionalan broj. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{D}$ racionalan broj. Tada je $\sqrt{n^2+1}$ racionalan, odnosno (zbog $n \in \mathrm{N}$) $\sqrt{n^2+1}$ mora biti prirodan broj. 5 bodova

Neka je $\sqrt{n^2+1} = t$ prirodan broj. Tada je

$$\begin{aligned} n^2+1 &= t^2\,, \\ t^2 - n^2 &= 1\,, \\ (t-n)(t+n) &= 1\,. \end{aligned}$$

Ovo je moguće jedino ako je $t - n = 1$ i $t + n = 1$. No tada je $n = 0$. Kako 0 nije prirodan broj, došli smo do kontradikcije. 10 bodova

Dakle, $\sqrt{D}$ nije racionalan broj, a kako su rješenja jednadžbe realna, ona su iracionalna. 5 bodova

3. Kako 0 nije rješenje jednadžbe, dijeljenjem s x^2 dobije se

$$x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0\,. \qquad \text{5 bodova}$$

Uvedemo li supstituciju $t = x - \frac{2}{x}$, tada je $t^2 = x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}$, tj. $x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4$.

Jednadžba sada poprima oblik

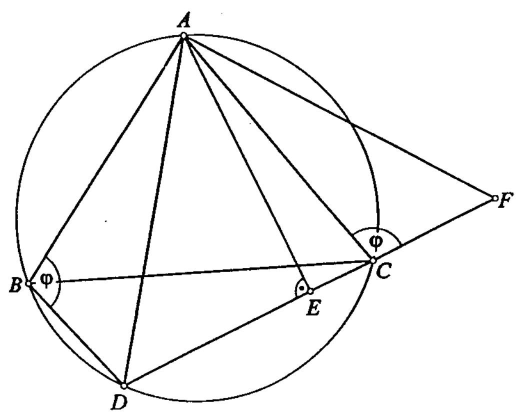
$$t^2 + 4 - t - 10 = 0 \qquad \text{tj.} \qquad t^2 - t - 6 = 0. \qquad \text{5 bodova}$$

Rješenja ove jednadžbe su $t_1 = 3$, $t_2 = -2$. 5 bodova

Za $t = 3$ je $x - \frac{2}{x} = 3$, tj. $x^2 - 3x - 2 = 0$ i rješenja su $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. 5 bodova

Za $t = -2$ je $x - \frac{2}{x} = -2$, tj. $x^2 + 2x - 2 = 0$ i rješenja su $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$. 5 bodova

4. Neka su ispunjeni uvjeti zadatka i $F \in DC$, $|CF| = |BD|$, $|DF| > |DC|$. Označimo još $\sphericalangle DBA = \phi$.



Tada je $\sphericalangle DCA = 180° - \phi$, pa je $\sphericalangle FCA = \phi$. 5 bodova

Stoga su trokuti ABD i ACF sukladni (dvije stranice i kut među njima), pa je $|AD| = |AF|$, tj. trokut ADF je jednakokračan.

Zbog $AE \perp DF$ vrijedi: $|DE| = |EF| = |EC| + |CF|$. 10 bodova

Sada je

$$\begin{aligned} |DB| + |DC| &= |CF| + |DC| \\ &= |CF| + (|DE| + |EC|) \\ &= |DE| + (|EC| + |CF|) \\ &= |DE| + |DE| \;=\; 2\,|DE| \end{aligned}$$

tj. $|DB| + |DC| = 2\,|DE|$, što je i trebalo dokazati. 10 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 2004.

III. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\log_5(5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}.$$

2. Dva susjedna vrha kvadrata nalaze se na kružnici polumjera 1. Kolika je maksimalna udaljenost središta kružnice od jednog od preostala dva vrha kvadrata?

3. Riješite jednadžbu

$$\operatorname{tg}^2(x+y) + \operatorname{ctg}^2(x+y) = 1 - 2x - x^2 .$$

4. Ako su α, β i γ kutovi trokuta s duljinama stranicama a, b i c, dokažite nejednakost

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 4\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}\right) .$$

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Jednadžbu transformiramo u pogodniji oblik:

$$\begin{aligned}
\log_5(5^{\frac{1}{x}}+125) &= \log_5 6+\log_5 5^{1+\frac{1}{2x}} ,\\
\log_5(5^{\frac{1}{x}}+125) &= \log_5(6\cdot 5^{1+\frac{1}{2x}}) ,\\
5^{\frac{1}{x}}+125 &= 6\cdot 5^{1+\frac{1}{2x}} ,\\
5^{\frac{1}{x}}+125 &= 6\cdot 5\cdot 5^{\frac{1}{2x}} ,\\
5^{\frac{1}{x}}-30\cdot 5^{\frac{1}{2x}}+125 &= 0 .
\end{aligned}$$

5 bodova

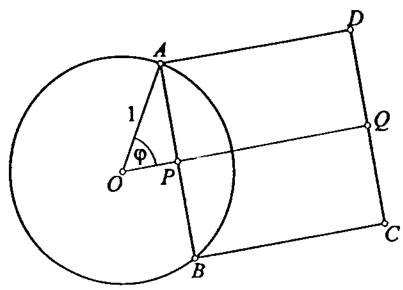
Supstitucijom $t=5^{\frac{1}{2x}}$, jednadžba prelazi u $t^2-30t+125=0$.
Njezina rješenja su $t_1=5$, $t_2=25$. 10 bodova

1° $t=5 \quad\Rightarrow\quad 5^{\frac{1}{2x}}=5 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2x}=1 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}$;

2° $t=25 \quad\Rightarrow\quad 5^{\frac{1}{2x}}=25 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2x}=2 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{4}$.

Rješenja jednadžbe su $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{4}$. 10 bodova

2. Neka su točke A i B na kružnici, vrhovi kvadrata. Dovoljno je promatrati slučaj kada su središte O kružnice i točke C, D s različitih strana pravca AB.



Koristeći Pitagorin poučak dobivamo:

$$|OD|^2=|OQ|^2+|QD|^2=(|OP|+|PQ|)^2+|QD|^2=(|OP|+2|AP|)^2+|AP|^2 .$$

5 bodova

Ako je $\phi=\sphericalangle AOP$, koristeći $|OP|=|OA|\cos\phi=\cos\phi$ i $|AP|=|OA|\sin\phi=\sin\phi$, dobivamo

$$\begin{aligned}
|OD|^2 &= (\cos\phi + 2\sin\phi)^2 + \sin^2\phi \\
&= \cos^2\phi + \sin^2\phi + 4\sin^2\phi + 2\cdot 2\sin\phi\cos\phi && \text{5 bodova} \\
&= 1 + 2\sin^2\phi + 2\cos^2\phi - 2\cos^2\phi + 2\sin^2\phi + 2\sin 2\phi \\
&= 3 + 2\sin 2\phi - 2\cos 2\phi && \text{5 bodova} \\
&= 3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2\phi - \frac{\pi}{4}\right) . && \text{5 bodova}
\end{aligned}$$

Maksimum se postiže za $2\phi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ i on iznosi

$$\text{maks}\,|OD| = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2} . \qquad \text{5 bodova}$$

3. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}^2(x+y) + \mathrm{ctg}^2(x+y) &= (\mathrm{tg}(x+y) - \mathrm{ctg}(x+y))^2 + 2\mathrm{tg}(x+y)\mathrm{ctg}(x+y) \\
&= (\mathrm{tg}(x+y) - \mathrm{ctg}(x+y))^2 + 2 .
\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je $\mathrm{tg}^2(x+y) + \mathrm{ctg}^2(x+y) \geq 2$. 5 bodova
Desna strana se može pisati u obliku

$$1 - 2x - x^2 = 2 - (1 + 2x + x^2) = 2 - (1+x)^2 \leq 2 . \qquad \text{5 bodova}$$

Odavde zaključujemo da će zadana jednadžba imati rješenje samo za vrijednosti x za koje je

$$\mathrm{tg}^2(x+y) + \mathrm{ctg}^2(x+y) = 2 \quad \text{i} \quad 1 - 2x - x^2 = 2 . \qquad \text{5 bodova}$$

Prva jednadžba je zadovoljena za $\mathrm{tg}(x+y) = \mathrm{ctg}(x+y)$, tj.
za $\mathrm{tg}(x+y) = \pm 1$, ili $x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. 5 bodova
Druga je zadovoljena ako je $(x+1)^2 = 0$, odakle je $x = -1$. 5 bodova
Dakle, rješenja jednadžbe su $x = -1$, $y = \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. Kosinusov poučak zapišimo u obliku

$$2bc\cos\alpha + a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ili} \quad 2\cos\alpha + \frac{a^2}{bc} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} . \qquad \text{5 bodova}$$

Kako je $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$, dobivamo

$$\frac{a^2}{bc} \geq 2(1 - \cos\alpha) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} ,$$

i na sličan način

$$\frac{b^2}{ca} \geq 4\sin^2\frac{\beta}{2} , \quad \frac{c^2}{ab} \geq 4\sin^2\frac{\gamma}{2} .$$

Zbrajanjem ove tri nejednakosti dobivamo nejednakost koju je trebalo dokazati. 20 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 2004.

IV. razred

1. Ako je z rješenje jednažbe $z^2 - z + 1 = 0$ izračunajte zbroj

$$z^{2004} + \frac{1}{z^{2004}} .$$

2. Ako su n i k prirodni brojevi, $k \leq n$, dokažite nejednakosti

$$\frac{n^k}{k^k} \leq \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} .$$

3. Kut između dva susjedna pobočna brida pravilne šesterostrane piramide jednak je kutu između pobočnog brida i baze. Odredite taj kut.

4. Za koje realne brojeve a postoji kompleksan broj z sa svojstvima:

$$|z + \sqrt{2}| = \sqrt{a^2 - 3a + 2} \qquad \text{i} \qquad |z + i\sqrt{2}| < a \, ?$$

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Množenjem jednadžbe sa $z+1$ dobivamo

$$z^3+1=0 \qquad \text{tj.} \qquad z^3=-1\,. \qquad\qquad \text{15 bodova}$$

Tada je $z^6=1$ i $z^{2004}=(z^6)^{334}=1$, pa je tražena suma jednaka 2. 10 bodova

Napomena 1. Na bilo koji način (npr. rješavanjem kvadratne jednadžbe i potenciranjem ili korištenjem Moivreove formule) izvesti zaključak $z^3=-1$ ili $z^6=1$, donosi 15 bodova.

2. Promatrat ćemo najprije lijevu, a zatim desnu nejednakost.

$$1^\circ \quad \frac{n^k}{k^k} \le \binom{n}{k} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n^k}{k^k} \le \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1}\,.$$

Dovoljno je pokazati da je $\dfrac{n}{k} \le \dfrac{n-l}{k-l}$, $\quad 0 \le l \le k-1$. Nakon sređivanja dobije se ekvivalentna nejednakost $k \le n$, koja je istinita. 15 bodova

$$2^\circ \quad \binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \le \frac{n^k}{k!}\,.$$

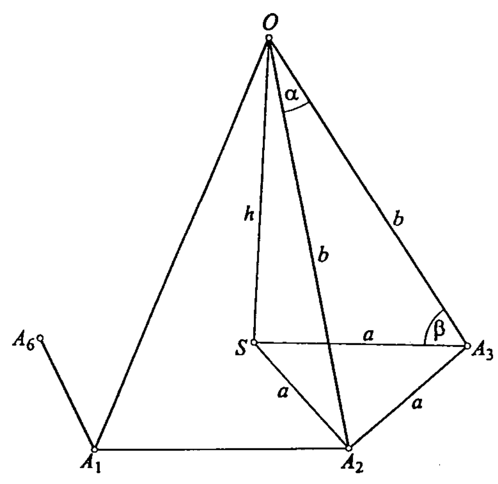
Ova nejednakost je ekvivalentna sa sljedećom

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \le n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n\,,$$

koja je očito istinita. 10 bodova

3. Prema oznakama na slici je

$$\frac{a}{b}=\cos\beta \quad \text{tj.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2=\cos^2\beta\,. \qquad (1) \qquad\qquad \text{5 bodova}$$



Po kosinusovom poučku je

$$\begin{aligned} a^2 &= 2b^2 - 2b^2\cos\alpha \qquad / : b^2 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 2 - 2\cos\alpha \,. \qquad (2) \end{aligned}$$

5 bodova

Iz (1) i (2) dobijemo: $\cos^2\beta = 2 - 2\cos\alpha$. 5 bodova

Kako je $\beta = \alpha$, dobijemo kvadratnu jednadžbu

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2 = 0 \,,$$

čija su rješenja $(\cos\alpha)_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$. 5 bodova

Zadovoljava samo rješenje $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$, tj. $\alpha = \arccos(\sqrt{3} - 1)$
ili $\alpha \approx 42.94°$. 5 bodova

Napomena 2. Za točno rješenje dovoljno je staviti $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$.

4. Da bi jednadžba imala smisla moraju biti zadovoljena ova dva uvjeta:

1° $a^2 - 3a + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$,

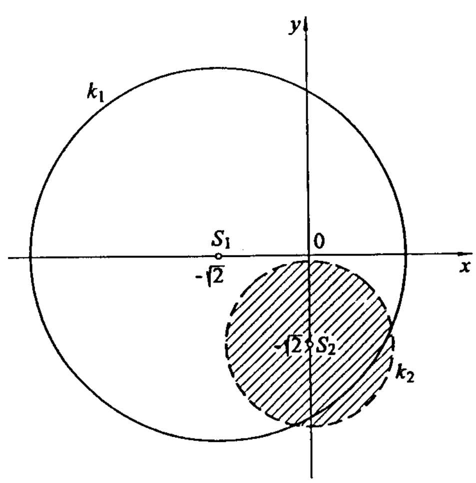
2° $a > 0$.

Oba uvjeta su zadovoljena za $a \in (0, 1] \cup [2, \infty)$. 5 bodova

Definirajmo:

$$\begin{aligned} A &= \{z \in \mathbf{C} : |z + \sqrt{2}| = \sqrt{a^2 - 3a + 2}\} \\ &= \text{rub } k_1((-\sqrt{2}, 0), \sqrt{a^2 - 3a + 2}) \,, \\ B &= \{z \in \mathbf{C} : |z + i\sqrt{2}| < a\} \\ &= \text{unutrašnjost } k_2((0, -\sqrt{2}), a) \,. \end{aligned}$$

5 bodova



Traženi broj a će postojati ako i samo ako je udaljenost središta S_1 i S_2 kružnica k_1 i k_2, a ona iznosi $d(S_1, S_2) = 2$, manja od zbroja njihovih polumjera, $r_1 = \sqrt{a^2 - 3a + 2}$ i $r_2 = a$, i da polumjer r_1 kružnice nije tako velik da kružnica S_1 u potpunosti sadrži kružnicu S_2 tj. $r_1 + r_2 > 2$ i $r_1 < 2 + r_2$. 10 bodova

Slijedi,

$$\sqrt{a^2 - 3a + 2} > 2 - a\,. \qquad (1)$$

Za $a > 2$ je $2 - a < 0$ i (1) je zadovoljeno .

Za $a \leq 2$ imamo

$$\sqrt{a^2 - 3a + 2} > 2 - a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2 > 4 - 4a + a^2,$$

odakle je $a > 2$, što je kontradikcija. U tom slučaju ne postoji traženi a.

Drugi uvjet je zadovoljen ako i samo ako je

$$\sqrt{a^2 - 3a + 2} < 2 + a \qquad \text{tj.} \qquad 0 \leq 2 + 7a,$$

a, kako je $a > 0$, ovaj uvjet je zadovoljen.

Zaključujemo da mora biti $a > 2$. 5 bodova