MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
5. ožujka 2004. godine

8. razred

1. Izračunaj

$$\frac{\sqrt{144}\cdot\sqrt{14.4}}{\sqrt{0.144}\cdot\sqrt{1.44}}.$$

2. Usporedi brojeve $80^5$ i $2^{32}$.

3. Odredi brojeve $x$ i $y$ za koje vrijedi

$$x^2+y^2+12x-4y+40=0.$$

4. Dvije kružnice različitih polumjera diraju se izvana u točki $A$. Tangenta na obje kružnice koja ne prolazi točkom $A$ dira kružnice u točkama $B$ i $C$. Odredi veličinu kuta $\measuredangle BAC$.

5. Dan je trokut $ABC$ kojemu su duljine stranica $a=15$ cm, $b=13$ cm i $c=14$ cm. Na stranici $\overline{AB}$ istaknuta je točka $D$ tako da je $\overline{CD}$ visina trokuta $ABC$. Ako je točka $E$ polovište stranice $\overline{AB}$, izračunaj duljinu dužine $\overline{DE}$.

2004 - opć

## RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

**OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

**1.**

$$\frac{\sqrt{144}\cdot\sqrt{14.4}}{\sqrt{0.144}\cdot\sqrt{1.44}}=\frac{12\cdot\sqrt{14.4}}{\sqrt{0.144}\cdot 1.2}=$$

2 BODA

$$=\frac{12}{1.2}\cdot\sqrt{\frac{14.4}{0.144}}$$

3 BODA

$$=\frac{12}{\frac{12}{10}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{144}{10}}{\frac{144}{1000}}}$$

2 BODA

$$=10\cdot\sqrt{100}=10\cdot 10=100.$$

3 BODA

........................................................................ UKUPNO 10 BODOVA

2. Broj $80^5$ napišimo ovako $80^5=(16\cdot 5)^5=(2^4\cdot 5)^5=2^{20}\cdot 5^5$. 3 BODA
Broj $2^{32}$ možemo zapisati kao $2^{32}=2^{20}\cdot 2^{12}$. 2 BODA
Treba usporediti brojeve $5^5$ i $2^{12}$. Izračunajmo ih. $5^5=5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=3125$. $2^{12}=4096$.. 3 BODA
Očito je $2^{12}>5^5$, pa je $2^{32}>80^5$. 2 BODA

........................................................................ UKUPNO 10 BODOVA

3. Izvršimo dvije dopune do potpunog kvadrata:

$$(x^2+12x+36)+(y^2-4y+4)+40-36-4=0$$

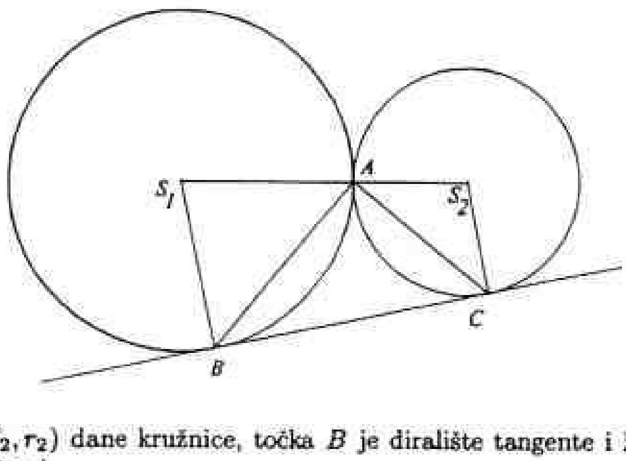
$$(x+6)^2+(y-2)^2=0.$$

6 BODOVA

Suma dva nenegativna broja jednaka je nuli samo ako su oba ta broja jednaka nuli, tj. $x+6=0$ i $y-2=0$. Odatle slijedi da je $x=-6$ i $y=2$. 4 BODA

........................................................................ UKUPNO 10 BODOVA

4. Skica




2 BODA

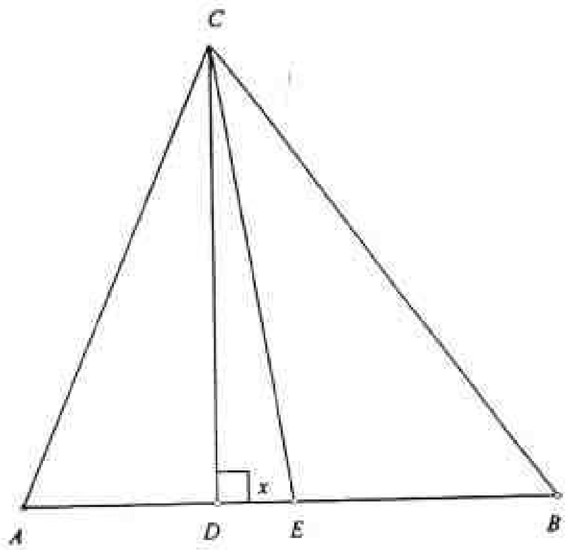
Neka su $k_1(S_1,r_1)$ i $k_2(S_2,r_2)$ dane kružnice, točka $B$ je dirałište tangente i kružnice $k_1$, a točka $C$ je diralište tangente i kružnice $k_2$.
Trokut $AS_2C$ je jednakokračan jer je $|AS_2|=|S_2C|=r_2$. Stoga je $\sphericalangle S_2AC=\sphericalangle S_2CA$. Te kutove označimo s $\alpha$. 1 BOD
Trokut $AS_1B$ je jednakokračan jer je $|AS_1|=|S_1B|=r_1$. Stoga je $\sphericalangle S_1BA=\sphericalangle S_1AB$. Te kutove označimo s $\beta$. 1 BOD
Tangenta je okomita na polumjer koji spaja središte i točku u kojoj tangenta dira kružnicu. Zato je $\sphericalangle CBS_1=\sphericalangle BCS_2=90°$, pa je $\sphericalangle CBA=90°-\beta$ i $\sphericalangle BCA=90°-\alpha$. 2 BODA

Zbroj kutova u $\triangle ABC$ jednak je $180^\circ$, pa je $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta$. 1 BOD

S druge strane, budući da se kružnice u točki $A$ diraju izvana slijedi da je $\sphericalangle S_1AS_2 = 180^\circ$, pa je $180^\circ = \alpha + \sphericalangle BAC + \beta$, tj. $\sphericalangle BAC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Tada je $\sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$, tj. $2\sphericalangle BAC = 180^\circ$, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. 3 BODA

.................................................................................. UKUPNO 10 BODOVA

**5.** Skica




2 BODA

Trokuti $ADC$ i $CDB$ su pravokutni pa za njih vrijedi Pitagorin poučak, tj. $b^2 = (7-x)^2 + v^2$, $a^2 = (7+x)^2 + v^2$, gdje je $x = |DE|$. 4 BODA

Izjednačavanjem izraza za $v^2$ dobivamo $b^2 - (7-x)^2 = a^2 - (7+x)^2$, $13^2 - (7-x)^2 = 15^2 - (7+x)^2$, $169 - (49 - 14x + x^2) = 225 - (49 + 14x + x^2)$, $28x = 56$, $x = 2$ cm. 4 BODA

.................................................................................. UKUPNO 10 BODOVA