MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

2. travnja 2004.

I. razred

1. Nađite sve prirodne brojeve s barem tri znamenke u kojima svake dvije uzastopne znamenke čine kvadrat prirodnog broja.

2. Dokažite da zbroj kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva ne može biti potpun kvadrat.

3. Ako je $a > 0$, odredite najmanju vrijednost funkcije $f(x) = x^5 + \frac{a}{x}$ za $x > 0$.

4. Stari Egipćani su površinu četverokuta računali po formuli $P = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, gdje su a, b, c, d redom duljine stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ četverokuta $ABCD$. Dokažite da ta formula daje rezultat koji je veći ili jednak pravoj površini četverokuta. U kojem slučaju je ta formula točna?

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Jedini dvoznamenkasti kvadrati prirodnih brojeva su:
16, 25, 36, 49, 64, 81. 5 bodova

Prva znamenka može, dakle, biti 1, 2, 3, 4, 6 ili 8, a zadnja 1, 4, 5, 6 ili 9. Stoga "prijelazne" znamenke, između dva dvoznamenkasta kvadrata, mogu biti samo 1, 4 ili 6. 5 bodova

Odredimo sve takve brojeve koji počinju sa 16: sljedeća znamenka mora biti 4, zatim 9 i dalje ne može. Na sličan način dobivamo i ostala rješenja:

troznamenkasti	–	164, 364, 649, 816;
četveroznamenkasti	–	1649, 3649, 8164;
peteroznamenkasti	–	81649;
šesteroznamenasti i više	–	ne postoje.

15 bodova

2. Pet uzastopnih prirodnih brojeva označimo sa $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, gdje je $n>2$ prirodan broj. Suma njihovih kvadrata je

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2).$$ 10 bodova

Suma kvadrata je djeljiva s 5 i kada bi ona bila kvadrat prirodnog broja, morala bi biti djeljiva s 25. No, kako n^2 ne može imati ostatak 3 pri dijeljenju s 5, n^2+2 ne može biti djeljivo s 5, što znači da suma kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva ne može biti djeljiva s 25. Zato ne može biti kvadrat prirodnog broja. 15 bodova

3. Danu funkciju možemo zapisati u zgodnijem obliku i primijeniti A-G nejednakost:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5+\frac{a}{5} = x^5+\frac{a}{5x}+\frac{a}{5x}+\frac{a}{5x}+\frac{a}{5x}+\frac{a}{5x} \\ &\geq 6\sqrt[6]{x^5\cdot\left(\frac{a}{5x}\right)^5} = 6\sqrt[6]{\left(\frac{a}{5}\right)^5}. \end{aligned}$$

15 bodova

Najmanja vrijednost se postiže kada je

$$x^5=\frac{a}{5x} \iff x^6=\frac{a}{5} \iff x=\sqrt[6]{\frac{a}{5}}.$$ 5 bodova

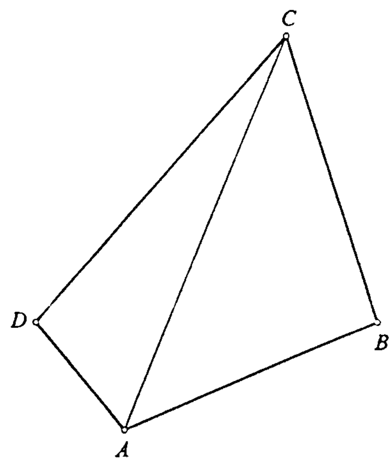
Najmanja vrijednost iznosi

$$f\left(\sqrt[6]{\frac{a}{5}}\right)=6\sqrt[6]{\left(\frac{a}{5}\right)^5}.$$ 5 bodova

4. Stavimo li $P = P(ABCD)$,

$$P_1 = P(ABC), \quad P_2 = P(ACD), \quad P_3 = P(BCD), \quad P_4 = P(ABD),$$

tada je $P = P_1 + P_2 = P_3 + P_4$. 5 bodova



Nadalje,

$$(1) \qquad P_1 \leq \frac{ab}{2}, \quad P_2 \leq \frac{cd}{2}, \quad P_3 \leq \frac{bc}{2}, \quad P_4 \leq \frac{ad}{2},$$ 5 bodova

Sada je

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ad}{2}\right) \\ &= \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}. \end{aligned}$$

10 bodova

Jednakost se postiže ako i samo ako u (1) vrijede jednakosti, tj. ako i samo ako je četverokut $ABCD$ pravokutnik. 5 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

2. travnja 2004.

II. razred

1. Nađite sva rješenja jednadžbe $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

2. Na promjeru $\overline{AB}$ polukružnice sa središtem O odabrana je točka C, različita od A, B i O. Iz točke C povučena su dva polupravca pod jednakim kutovima na AB koji sijeku polukružnicu u točkama D i E ($\neq A, B$). U točki D povučena je okomica na polupravac CD koji siječe polukružnicu u točki K. Dokažite da ako je $D \neq E$, pravci KE i AB su paralelni.

3. U 20 posuda (od kojih svaka ima barem 210 litara) nalazi se redom 1, 2, 3, ..., 20 litara vode. Iz posude A u posudu B dozvoljeno je preliti točno onoliko vode koliko već ima u posudi B (uz pretpostavku da u posudi A ima barem toliko vode koliko u B). Da li je moguće nakon konačno prelijevanja dobiti:

   a) 5 posuda s po 3 litara vode, a u preostalih 15 posuda po 6, 7, ..., 20 litara;

   b) svih 210 litara vode u jednoj posudi?

4. Ako iz svakog vrha konveksnog poliedra izlaze po četiri brida, dokažite da svaka ravnina, koja ne prolazi niti kroz jedan vrh poliedra, siječe taj poliedar po poligonu s parnim brojem vrhova.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Jednadžbu zapišimo u obliku

$$(6x+7)^2(3x+4)(3x+3)=18\,.$$

Supstitucijom $t = 3x + \frac{7}{2}$ dobivamo jednadžbu

$$(2t)^2(t+\frac{1}{2})(t-\frac{1}{2})=18\,,$$

a sređivanjem,

$$4t^4-t^2-18=0\,.$$ 10 bodova

Rješavanjem ove bikvadratne jednadžbe dobivamo:

$$t^2=\frac{9}{4} \quad\Rightarrow\quad t_{1,2}=\pm\frac{3}{2}\,,$$ 5 bodova

$$t^2=-2 \quad\Rightarrow\quad t_{3,4}=\pm i\sqrt{2}\,.$$ 5 bodova

Dobivaju se ova četiri rješenja:

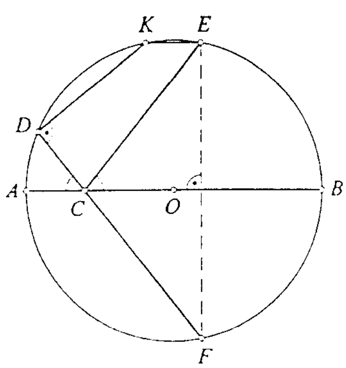
$$3x_1+\frac{7}{2}=\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{2}{3}\,,$$

$$3x_2+\frac{7}{2}=-\frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad x_2=-\frac{5}{3}\,,$$

$$3x_{3,4}+\frac{7}{2}=\pm i\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad x_{3,4}=-\frac{7}{6}\pm\frac{i\sqrt{2}}{3}\,.$$

5 bodova

2. Docrtajmo i drugu polovicu kružnice kao na slici.



Neka je F točka simetrična točki E s obzirom na pravac AB. Tada je $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCF$. Prema uvjetu zadatka je $\sphericalangle BCE = \sphericalangle ACD$, odakle je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCF$, pa su točke D, C, F kolinearne. Stoga je $\sphericalangle FDK = \sphericalangle CDK = 90°$. 10 bodova

Četverokut $DFEK$ je tetivan pa je i $\sphericalangle KEF = 90°$. Sada iz $KE \perp EF$ i $AB \perp EF$ slijedi $KE \parallel AB$. 15 bodova

3. a) Uočimo da se broj boca s neparnim brojem litara nikad ne povećava jer pri prelijevanju iz A u B vrijedi:

PRIJE		POSLIJE	
A	B	A	B
PARNO	PARNO	PARNO	PARNO
NEPARNO	PARNO	NEPARNO	PARNO
PARNO	NEPARNO	NEPARNO	PARNO
NEPARNO	NEPARNO	PARNO	PARNO

Stoga je situaciju iz a) nemoguće dobiti jer ima više posuda s neparnim brojem litara nego na početku. 10 bodova

b) Da bi u jednoj posudi dobili svih 210 litara u koraku prije toga moraju biti dvije posude s po 105 litara (a sve ostale prazne). Ali, u nekoj posudi možemo dobiti neparan broj litara jedino tako da iz nje prelijemo u neku drugu posudu (vidi tablicu). To znači da će u jednom trenutku u dvije posude biti više od $105 + 105 = 210$ litara, pa je stoga situacija b) nemoguća. 15 bodova

4. Neka je m broj vrhova dobivenog poligona i neka ravnina siječe dani poliedar na dva poliedra, od kojih je jedan P i neka on osim m vrhova poligona ima još n vrhova polaznog poliedra. Iz svakog od tih n vrhova izlaze po 4 brida, dok iz svakog od m vrhova dobivenog poligona izlaze po dva brida poligona i još jedan brid poliedra P koji nije brid poligona. Tada za broj b bridova od P vrijedi jednakost

$$2b = 3m + 4n\ ,$$

pa m mora biti paran. 25 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

2. travnja 2004.

III. razred

1. Dokažite da za sve realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\sin^2 x \cos y + \sin^2 y \cos z + \sin^2 z \cos x < \frac{3}{2}\,.$$

2. Pretpostavimo da duljine stranica trokuta a, b, c zadovoljavaju jednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{|b^2+c^2-a^2|}{bc}\,, \\ \frac{c}{b} &= \frac{|c^2+a^2-b^2|}{ca}\,, \\ \frac{a}{c} &= \frac{|a^2+b^2-c^2|}{ab}\,. \end{aligned}$$

Odredite sve moguće vrijednosti kutova tog trokuta.

3. Neka je ABC pravokutni trokut s katetama duljina a i b i hipotenuzom duljine c, a $\sphericalangle BCA = 90°$. S k označimo tom trokutu opisanu kružnicu, k_1 je kružnica koja dodiruje hipotenuzu, visinu $\overline{CD}$ i luk $\overset{\frown}{BC}$ kružnice k, te k_2 kružnica koja dodiruje hipotenuzu, visinu $\overline{CD}$ i luk $\overset{\frown}{AC}$ kružnice k. Ako su r_1 i r_2 polumjeri kružnica k_1 i k_2 dokažite da je

$$r_1 + r_2 = a + b - c\,.$$

4. U sva polja tablice 100×100 upisani su brojevi $1, 2, \ldots, 100$ i to tako da se svaki pojavljuje točno 100 puta. Pokažite da postoji redak ili stupac u kojem ima barem 10 različitih brojeva.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Koristit ćemo A-G nejednakost $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, za $a,\ b \ge 0$.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$.

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x\cos y + \sin^2 y\cos z + \sin^2 z\cos x \\
\le\ & \frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^2 y) + \frac{1}{2}(\sin^4 y + \cos^2 z) + \frac{1}{2}(\sin^4 z + \cos^2 x) \qquad \text{5 bodova} \\
=\ & \frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^2 x) + \frac{1}{2}(\sin^4 y + \cos^2 y) + \frac{1}{2}(\sin^4 z + \cos^2 z) \\
\le\ & \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{1}{2}(\sin^2 y + \cos^2 y) + \frac{1}{2}(\sin^2 z + \cos^2 z) = \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

jer je $\sin^4 t \le \sin^2 t$, budući je $\sin^2 t \in [0,1]$. 10 bodova

Dokažimo još da vrijedi stroga nejednakost. Kad bi vrijedila jednakost, moralo bi biti

$$\sin^4 t = \sin^2 t \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin^2 t = 0 \quad \text{ili} \quad 1, \qquad \text{za} \quad t = x,\ y,\ z\,.$$

Nadalje, iz jednakosti u A-G nejednakosti dobivamo

$$\sin^4 x = \cos^2 y\,, \quad \sin^4 y = \cos^2 z\,, \quad \sin^4 z = \cos^2 x\,.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\sin^2 x = 0 \ &\Rightarrow\ \cos^2 x = 1 \ \Rightarrow\ \sin^4 z = 1 \ \Rightarrow\ \sin^2 z = 1 \ \Rightarrow\ \cos^2 z = 0 \\
&\Rightarrow\ \sin^4 y = 0 \ \Rightarrow\ \sin^2 y = 0 \ \Rightarrow\ \cos^2 y = 1 \ \Rightarrow\ \sin^4 x = 1 \\
&\Rightarrow\ \sin^2 x = 1\,,
\end{aligned}$$

što je kontradikcija. Na isti način se dobije kontradikcija za $\sin^2 x = 1$. Stoga se jednakost nikad ne dostiže. 10 bodova

2. Prema poučku o sinusima i kosinusovom poučku prvu jednakost možemo pisati u obliku

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 2|\cos\alpha| \qquad \text{tj.} \qquad \sin\beta = |\sin 2\alpha|, \qquad \text{5 bodova}$$

a ovo je ekvivalentno sa

(1) $\quad \beta = 2\alpha, \quad$ ili $\quad \beta = 180^\circ - 2\alpha \quad$ ili $\quad \beta = 2\alpha - 180^\circ$.

Ostale dvije jednakosti su ekvivalentne sa

(2) $\quad \gamma = 2\beta, \quad$ ili $\quad \gamma = 180^\circ - 2\beta \quad$ ili $\quad \gamma = 2\beta - 180^\circ$.

(3) $\quad \alpha = 2\gamma, \quad$ ili $\quad \alpha = 180^\circ - 2\gamma \quad$ ili $\quad \alpha = 2\gamma - 180^\circ$. 5 bodova

Ako je ispunjena druga jednakost u (1), onda je $2\alpha + \beta = 180^\circ$, odakle je $\alpha = \gamma$. Tada je moguća jedino druga jednakost u (3), a iz nje slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Isto rješenje se dobiva ako pretpostavimo da vrijedi druga jednakost u (2) ili (3). 5 bodova

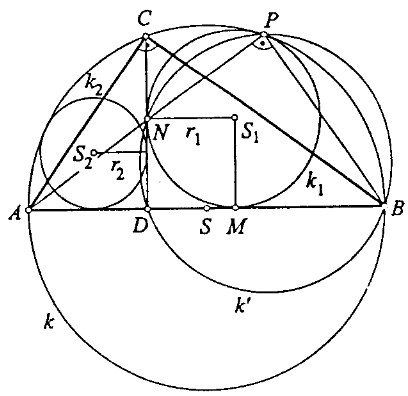
U daljnjem pretpostavljamo da druga jednakost u (1), (2) ili (3) nije ispunjena. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je α najmanji kut trokuta (tj. $\alpha \le \beta$, $\alpha \le \gamma$). Tada u (1) nije moguće $\beta = 2\alpha - 180°$ pa mora biti $\beta = 2\alpha$. Ako u (2) vrijedi $\gamma = 2\beta$, onda zbog $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, zaključujemo $\alpha = \frac{180°}{7}$, $\beta = 2 \cdot \frac{180°}{7}$, $\gamma = 4 \cdot \frac{180°}{7}$, a ti kutovi zadovoljavaju treću jednakost u (3). 5 bodova

Ako bi u (2) vrijedilo $\gamma = 2\beta - 180°$, imali bismo $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 4\alpha - 180°$, a kako je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, to bi dalo $\alpha = \frac{360°}{7}$, $\beta = 2 \cdot \frac{360°}{7}$, $\gamma = 4 \cdot \frac{360°}{7} - 180° < \alpha$, što je u suprotnosti s pretpostavkom. 5 bodova

Dakle, trokut je ili jednakostraničan ili mu se kutovi odnose kao 1 : 2 : 4.

3. Pokazat ćemo da je

$$r_1 = b - \frac{b^2}{c} \quad \text{i} \quad r_2 = a - \frac{a^2}{c}. \tag{1}$$



Pri tome je dovoljno pokazati jednu od ove dvije relacije, npr. za r_1. Označimo dirališta kružnice k_1 redom: M - s hipotenuzom $\overline{AB}$, N - s visinom $\overline{CD}$ i P - s lukom $\widehat{BC}$ kružnice k. Tada vrijedi:

$$\sphericalangle APB = 90° = \sphericalangle BDN$$

$\Rightarrow$ četverokut $BDNP$ je tetivni. 5 bodova

Označimo s k' kružnicu opisanu četverokutu $BDNP$. Sada zaljučujemo:

1) potencija točke A u odnosu na k_1 — $|AN| \cdot |AP| = |AM|^2$;

2) potencija točke A u odnosu na k' — $|AN| \cdot |AP| = |AD| \cdot |AB|$;

3) u pravokutnom $\triangle ABC$, duljina $b = |AC|$ je geometrijska sredina duljine ortogonalne projekcije $\overline{AD}$ i duljine hipotenuze $c = |AB|$, tj. $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$.

Iz 1) – 3) lako slijedi $|AM| = |AC| = b$ i kako je $r_1 = |DM|$ dobivamo

$$r_1 = |AM| - |AD| = b - \frac{|AC|^2}{|AB|} = b - \frac{b^2}{c}.$$ 15 bodova

Napokon, iz (1) zbrajanjem se dobiva

$$r_1 + r_2 = a + b - \frac{a^2}{c} - \frac{b^2}{c} = a + b - c\,.$$ 5 bodova

4. Uvedimo oznake:

r_i – ukupan broj redaka u kojima se pojavljuje broj i, $i = 1, ..., 100$;

s_i – ukupan broj stupaca u kojima se pojavljuje broj i, $i = 1, ..., 100$;

R_j – broj različitih brojeva koji se pojavljuju u j-tom retku, $j = 1, ..., 100$;

S_j – broj različitih brojeva koji se pojavljuju u j-tom stupcu, $j = 1, ..., 100$. 5 bodova

Kako se na presjeku r_i redaka sa s_i stupaca nalazi $r_i s_i$ polja, a broj i se pojavljuje 100 puta, mora biti $r_i s_i \geq 100$. Zato je

$$r_i + s_i \geq 2\sqrt{r_i s_i} \geq 2\sqrt{100} = 20, \qquad i = 1, 2, ..., 100.$$ 5 bodova

Dvostruko prebrojavanje parova incidencije (redak ili stupac, broj) daje

$$\sum_{j=1}^{100} R_j + \sum_{j=1}^{100} S_j = \sum_{i=1}^{100} r_i + \sum_{i=1}^{100} s_i \geq 100 \cdot 20 = 2000.$$ 10 bodova

Slijedi da je barem jedan od brojeva $R_1, ..., R_{100}, S_1, ..., S_{100}$ veći ili jednak 10. 5 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

2. travnja 2004.

IV. razred

1. Dokažite da je za svaki prirodan broj n, broj $(\operatorname{tg} 15^\circ)^n + (\operatorname{ctg} 15^\circ)^n$ paran prirodan broj.

2. Za svaki prirodan broj n funkcija $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ zadovoljava uvjet

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n) .$$

Ako je $f(1) = 1002$, odredite $f(2004)$.

3. U ravnini su dane točke A, B i C. Neka su D, E, F, G, H i I točke u istoj ravnini takve da su trokuti ABD, BAE, CAF, DFG, ECH i GHI pozitivno orijentirani jednakostranični trokuti. Dokažite da je točka E polovište dužine $\overline{AI}$.

4. Na koliko načina je moguće odabrati podskupove A, B, C skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ takve da vrijedi

$$A \cap B \cap C = \emptyset, \qquad A \cap B \neq \emptyset, \qquad A \cap C \neq \emptyset?$$

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.*

$$(\operatorname{tg} 15^\circ)^n + (\operatorname{ctg} 15^\circ)^n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n. \qquad 5 \text{ bodova}$$

Prema binomnoj formuli

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^n &= 2^n - \binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}\cdot\sqrt{3} + \binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}\cdot(\sqrt{3})^2 - \ldots - (-1)^n(\sqrt{3})^n \\ (2+\sqrt{3})^n &= 2^n + \binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}\cdot\sqrt{3} + \binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}\cdot(\sqrt{3})^2 + \ldots + (\sqrt{3})^n.\end{aligned}$$

10 bodova

U zbroju $(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$ članovi koji imaju faktor $\sqrt{3}$ na neparnu potenciju se pokrate. Članovi koji ostaju su prirodni brojevi i pojavljuju se u parovima (jedan pribrojnik iz $(2-\sqrt{3})^n$, drugi iz $(2+\sqrt{3})^n$), pa je stoga dobiveni broj paran. 10 bodova

Drugo rješenje. Vrijednosti $\operatorname{tg} 15^\circ$ i $\operatorname{ctg} 15^\circ$ možemo odrediti na više načina, npr.

a) $\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos^\circ}} = \sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = 2-\sqrt{3}.$

b) $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \dfrac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1+\operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1} = 2-\sqrt{3}.$

Sada je $\operatorname{ctg} 15^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 15^\circ} = 2+\sqrt{3}.$ 5 bodova

Označimo $a_n = (\operatorname{tg} 15^\circ)^n + (\operatorname{ctg} 15^\circ)^n$, za $\in \mathbb{N}$. Odmah je jasno da su brojevi a_n pozitivni.
Uočimo $a_1 = 4,\ \ a_2 = (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3}) = 14.$
Dokažimo danu tvrdnju matematičkom indukcijom. 5 bodova

Pretpostavimo da su brojevi a_n i a_{n-1} $(n \geq 2)$ parni. Tada je

$$\begin{aligned}4a_n &= a_1 \cdot a_n = (\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ)(\operatorname{tg}^n 15^\circ + \operatorname{ctg}^n 15^\circ) \\ &= (\operatorname{tg}^{n+1} 15^\circ + \operatorname{ctg}^{n+1} 15^\circ) + \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{ctg} 15^\circ (\operatorname{tg}^{n-1} 15^\circ + \operatorname{ctg}^{n-1} 15^\circ) \\ &= a_{n+1} + 1 \cdot a_{n-1}.\end{aligned}$$

Odavde je $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$. (Ovu rekurziju možemo dobiti i na druge načine.) 10 bodova

Iz posljednje jednakosti zaključujemo: ako je a_{n-1} paran broj, tada je i broj a_{n+1} paran, a budući da su a_1 i a_2 parni, onda su svi a_n parni. 5 bodova

2. Oduzimanjem danih jednadžbi za n i $n-1$:

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)+f(n) &= n^2 f(n)\,, \\ f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1) &= (n-1)^2 f(n-1)\,, \end{aligned}$$

dobivamo redom

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2 f(n)-(n-1)^2 f(n-1) && \text{5 bodova} \\ (n^2-1)f(n) &= (n-1)^2 f(n-1) \\ f(n) &= \frac{(n-1)^2}{n^2-1} f(n-1) \\ f(n) &= \frac{n-1}{n+1} f(n-1), && \text{za } n \geq 2. \end{aligned}$$

5 bodova

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n-1}{n+1} f(n-1) = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n} f(n-2) = \ldots \\ &= \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} f(1) \\ &= \frac{2f(1)}{n(n+1)}\,. \end{aligned}$$

10 bodova

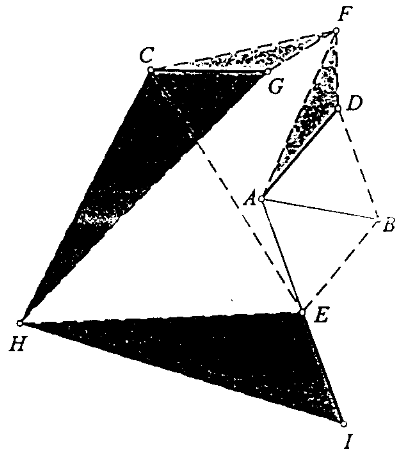
Iz $f(1)=1002$, za $n=2004$, dobije se

$$f(2004)=\frac{2\cdot 1002}{2004\cdot 2005}=\frac{1}{2005}\,. \qquad \text{5 bodova}$$

3. *Prvo rješenje – izometrije.* Promatrajmo trokute ADF i CGF. Vrijedi, $|AF| = |CF|$, $|DF| = |GF|$ i

$$\sphericalangle AFD = \sphericalangle GFD - \sphericalangle GFA = 60^\circ - \sphericalangle GFA = \sphericalangle CFA - \sphericalangle GFA = \sphericalangle CFG.$$

(Uz drugačiju sliku, vrijedi $\sphericalangle AFD = 60^\circ - \sphericalangle DFC = \sphericalangle CFG$.)



Stoga je po teoremu S-K-S, $\triangle ADF \cong \triangle CGF$. (1) 5 bodova

Vidimo da rotacijom dužine $\overline{AD}$ za -60° oko točke F dobivamo dužinu $\overline{CG}$, pa slijedi $CG \parallel AB$. 5 bodova

Na sličan način, zbog $|HC| = |HE|$, $|HG| = |HI|$ i $\sphericalangle CHG = 60^\circ - \sphericalangle GHE = \sphericalangle EHI$ vrijedi $\triangle HCG \cong \triangle HEI$. (2)

To znači da rotacijom $\overline{CG}$ oko H za kut od -60° dobivamo $\overline{EI}$, pa je kut između $\overline{AB}$ i $\overline{EI}$ jednak 60°, tj. $EI \parallel AE$, dakle točke A, E i I su kolinearne. 10 bodova

Vrijedi $|EI| \overset{(2)}{=} |CG| \overset{(1)}{=} |AD| = |AB| = |AE|$, pa je E polovište dužine $\overline{AI}$. 5 bodova

Drugo rješenje – kompleksni brojevi. Odaberimo koordinatni sustav tako da je $A = (0)$, $B = (1)$, $C = (c)$. Ako je XYZ jednakostraničan, pozitivno orijentirani trokut, onda koordinate njegovih vrhova zadovoljavaju

$$z = x + \omega(y - x), \qquad \text{gdje je} \quad \omega = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

5 bodova

Vrijedi $\omega^3 = -1$, $\omega \neq -1$, pa je $\omega^2 - \omega + 1 = 0$.

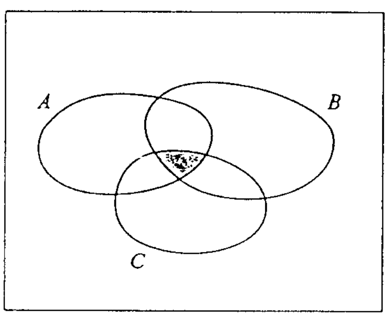
Sada imamo:

$$\begin{aligned}
d &= 0 + \omega(1 - 0) = \omega, \\
e &= 1 + \omega(0 - 1) = 1 - \omega, \\
f &= c + \omega(0 - c) = c - \omega c, \\
g &= d + \omega(f - d) = \omega + \omega(c - \omega c - \omega) \\
&= \omega + \omega c - \omega^2 c - \omega^2 = \omega - \omega c - (\omega - 1)c - (\omega - 1) \\
&= c + 1, \\
h &= e + \omega(c - e) = 1 - \omega + \omega(c - 1 + \omega) \\
&= 1 - \omega + \omega c - \omega + \omega - 1 = \omega c - \omega, \\
i &= g + \omega(h - g) = c + 1 + \omega(\omega c - \omega - c - 1) \\
&= c + 1 + (\omega - 1)c - (\omega - 1) - \omega c - \omega = 2(1 - \omega).
\end{aligned}$$

15 bodova

Iz $A = (0)$, $E = (1 - \omega)$ i $I = (2(1 - \omega))$ slijedi tvrdnja zadatka. 5 bodova

4. Uočimo da skupovi $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (C \cup A)$, $C \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \setminus C$, $(B \cap C) \setminus A$, $(C \cap A) \setminus B$, $(A \cup B \cup C)^c$, čine particiju skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. 5 bodova



Svaki element je moguće staviti u bilo koji od tih 7 skupova, pa imamo 7^n takvih particija. 5 bodova

Particije u kojima su skupovi $(A \cap B) \setminus C$ ili $(A \cap C) \setminus B$ prazni ne zadovoljavaju uvjete zadatka. Svaki od njih ima 6^n poskupova, pa od prethodnog rezultata treba oduzeti $2 \cdot 6^n$. 5 bodova

Međutim, time smo broj particija u kojima su $(A \cap B) \setminus C$ i $(A \cap C) \setminus B$ prazni, odbili dvaput, pa rezultatu treba dodati broj takvih particija, a njih ima 5^n. 5 bodova

Konačan rezultat je $7^n - 2 \cdot 6^n + 5^n$. 5 bodova