

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE  
HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

### MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika  
osnovnih škola Republike Hrvatske  
2. travnja 2004. godine

7. razred

1. Odredi  $x$  iz razmjera

$$\frac{\left(4 - 3.5\left(2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5}\right)\right) : 0.16}{x} = \frac{5\frac{3}{7} - \frac{3}{14} : \frac{1}{16}}{41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60}}$$

2. Razlika, zbroj i umnožak dva broja odnose se kao 1 : 4 : 15. Koji su to brojevi?
3. Od pet uzastopnih neparnih prirodnih brojeva uvijek postoji bar jedan broj koji nije djeljiv niti sa 3, niti sa 5, niti sa 7. Dokaži.
4. Unutarnji kutovi  $\alpha$  i  $\beta$  dva pravilna mnogokuta odnose se kao 2 : 3. Odredi sve parove pravilnih mnogokuta koji imaju to svojstvo.
5. Dan je raznostraničan trokut  $ABC$ . Na najvećoj stranici  $\overline{AB}$  odabrana je točka  $D$  tako da je  $|BD| = |BC|$ . Dokaži da pravac  $CD$  dijeli kut  $\sphericalangle ACB$  na dva kuta, pri čemu je jedan kut jednak polovici zbroja, a drugi polovici razlike kutova  $\sphericalangle ACB$  i  $\sphericalangle BAC$ .

EN  
2004.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijednost brojnika prvog razlomka je  $\frac{35}{8}$ . 3 boda  
 Vrijednost brojnika drugog razlomka je 2. 2 boda  
 Vrijednost nazivnika drugog razlomka je  $\frac{16}{35}$ . 2 boda  
 Vrijednost drugog razlomka je  $\frac{35}{8}$ . 1 bod  
 Traženi broj  $x$  jednak je 1. 2 boda

UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su  $x$  i  $y$  traženi brojevi. Tada vrijedi  $(x - y) : (x + y) : xy = 1 : 4 : 15$ . Uvođenjem parametra  $k$  možemo pisati  $x - y = k$ ,  $x + y = 4k$ ,  $xy = 15k$ . 2 boda  
 Iz prve dvije jednakosti dobivamo  $x = \frac{5}{2}k$  i  $y = \frac{3}{2}k$ . 3 boda  
 Sad treća jednakost ima oblik  $\frac{5}{2}k \cdot \frac{3}{2}k = 15k$ , tj.  $k = 4$ . 3 boda  
 Sad je  $x = 10$  i  $y = 6$ . 2 boda

UKUPNO 10 BODOVA

3. Od pet uzastopnih neparnih brojeva najviše dva su djeljivi s 3. Naime, ako je prvi broj djeljiv s 3, onda je i četvrti broj djeljiv s 3, a ako je drugi broj djeljiv s 3, tada je peti broj djeljiv s 3. 4 boda  
 Samo je jedan od tih brojeva djeljiv s 5, a najviše jedan je djeljiv sa 7. 3 boda  
 Dakle, najviše su četiri broja djeljiva s 3, 5 ili 7, pa je preostao barem jedan broj koji nije djeljiv niti s 3, niti s 5 niti sa 7. 3 boda

UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je  $m$  broj stranica mnogokuta s unutaršnjim kutem  $\alpha$ , a  $n$  neka je broj stranica mnogokuta s unutaršnjim kutem  $\beta$ . Tada je  $\alpha : \beta = 2 : 3$ , tj.  $\frac{(m-2)180}{m} : \frac{(n-2)180}{n} = 2 : 3$ . Srednjenjem tog razmjera dobivamo  $mn + 4m = 6n$ . 3 boda

Rješavanjem ove diofantske jednadžbe dobivamo  $m(n+4) = 6n$ ,  $m = \frac{6n}{n+4}$ ,  $m = \frac{6n+24-24}{n+4}$ ,  $m = 6 - \frac{24}{n+4}$ . 2 boda

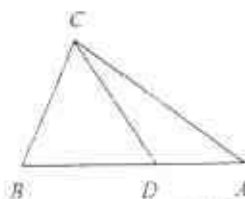
Dakle,  $n+4$  dijeli 24, pa su moguće vrijednosti za  $n+4$  ovi brojevi:  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$ . 2 boda

Zbog  $n > 0$  slijedi da je  $n+4 > 4$ , pa promatramo samo ova 4 slučaja:

- a) Ako je  $n+4 = 6$ , tada je  $n = 2$  što nije moguće. 1 bod  
 b) Ako je  $n+4 = 8$ , tada je  $n = 4$  i  $m = 3$ . 3 bod  
 c) Ako je  $n+4 = 12$ , tada je  $n = 8$  i  $m = 4$ . 1 bod  
 d) Ako je  $n+4 = 24$ , tada je  $n = 20$  i  $m = 5$ . 1 bod

UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica 1 bod



Neka je  $\sphericalangle BCD = y$ ,  $\sphericalangle ACD = x$ . Zbog jednakosti  $|BD| = |BC|$  zaključujemo da je trokut  $BCD$  jednakokratan, pa je i  $\sphericalangle BDC = y$ . 1 bod

Primjenom poučka o zbroju kutova u trokutima  $BCD$  i  $ABC$  dobivamo:  $2y + \beta = \alpha + \beta + \gamma$ , tj.  $y = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ . 4 boda

Kut  $\sphericalangle BDC$  je vanjski kut trokuta  $ADC$ , pa vrijedi  $y = \alpha + x$ . Zbog  $x + y = \gamma$ , tj.  $y = \gamma - x$  iz jednakosti  $y = \alpha + x$  dobivamo  $\gamma - x = \alpha + x$ ,  $x = \frac{\gamma - \alpha}{2}$ . 4 boda

UKUPNO 10 BODOVA