MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
2. travnja 2004. godine

7. razred

1. Odredi x iz razmjera

$$\frac{\left(4-3.5(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5})\right):0.16}{x}=\frac{5\frac{3}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{16}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$$

2. Razlika, zbroj i umnožak dva broja odnose se kao $1:4:15$. Koji su to brojevi?

3. Od pet uzastopnih neparnih prirodnih brojeva uvijek postoji bar jedan broj koji nije djeljiv niti sa 3, niti sa 5, niti sa 7. Dokaži.

4. Unutarnji kutovi α i β dva pravilna mnogokuta odnose se kao $2:3$. Odredi sve parove pravilnih mnogokuta koji imaju to svojstvo.

5. Dan je raznostraničan trokut ABC. Na najvećoj stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka D tako da je $|BD|=|BC|$. Dokaži da pravac CD dijeli kut $\sphericalangle ACB$ na dva kuta, pri čemu je jedan kut jednak polovici zbroja, a drugi polovici razlike kutova $\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle BAC$.

ŽN 2004.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijednost brojnika prvog razlomka je $\frac{35}{8}$. 3 boda
Vrijednost brojnika drugog razlomka je 2. 2 boda
Vrijednost nazivnika drugog razlomka je $\frac{16}{15}$. 2 boda.
Vrijednost drugog razlomka je $\frac{35}{8}$. 1 bod
Traženi broj x jednak je 1. 2 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su x i y traženi brojevi. Tada vrijedi $(x-y):(x-y):xy = 1:4:15$. Uvođenjem parametra k možemo pisati $x-y=k$, $x+y=4k$, $xy=15k$. 2 boda
Iz prve dvije jednakosti dobivamo $x=\frac{5}{2}k$ i $y=\frac{3}{2}k$. 3 boda
Sad treća jednakost ima oblik $\frac{5}{2}k\cdot\frac{3}{2}k=15k$, tj. $k=4$. 3 boda
Sad je $x=10$ i $y=6$. 2 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

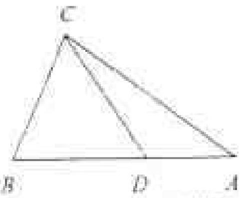
3. Od pet uzastopnih neparnih brojeva najviše dva su djeljivi s 3. Naime, ako je prvi broj djeljiv s 3, onda je i četvrti broj djeljiv s 3, a ako je drugi broj djeljiv s 3, tada je peti broj djeljiv s 3. 4 boda
Samo je jedan od tih brojeva djeljiv s 5, a najviše jedan je djeljiv sa 7. 3 boda
Dakle, najviše su četiri broja djeljiva s 3, 5 ili 7, pa je preostao barem jedan broj koji nije djeljiv niti s 3, niti s 5 niti sa 7. 3 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je m broj stranica mnogokuta s unutarnjim kutem α, a n neka je broj stranica mnogokuta s unutarnjim kutem β. Tada je $\alpha:\beta=2:3$, tj. $\frac{(m-2)\,180^\circ}{m}:\frac{(n-2)\,180^\circ}{n}=2:3$. Sređivanjem tog razmjera dobivamo $mn+4m=6n$. 3 boda
Rješavanjem ove diofantske jednadžbe dobivamo $m(n+4)=6n$, $m=\frac{6n}{n+4}$, $m=\frac{6n+24-24}{n+4}$, $m=6-\frac{24}{n+4}$. 2 boda
Dakle, $n+4$ dijeli 24, pa su moguće vrijednosti za $n+4$ ovi brojevi: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$. 2 boda
Zbog $n>0$ slijedi da je $n+4>4$, pa promatramo samo ova 4 slučaja:

a) Ako je $n+4=6$, tada je $n=2$ što nije moguće.
b) Ako je $n+4=8$, tada je $n=4$ i $m=3$. 1 bod
c) Ako je $n+4=12$, tada je $n=8$ i $m=4$. 1 bod
d) Ako je $n+4=24$, tada je $n=20$ i $m=5$. 1 bod

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica 1 bod



Neka je $\sphericalangle BCD = y$, $\sphericalangle ACD = x$. Zbog jednakosti $|BD|=|BC|$ zaključujemo da je trokut BCD jednakokračan, pa je i $\sphericalangle BDC = y$. 1 bod
Primjenom poučka o zbroju kutova u trokutima BCD i ABC dobivamo: $2y+\beta=\alpha+\beta+\gamma$, tj. $y=\frac{\alpha+\gamma}{2}$. 4 boda
Kut $\sphericalangle BDC$ je vanjski kut trokuta ADC, pa vrijedi $y=\alpha+x$. Zbog $x+y=\gamma$, tj. $y=\gamma-x$ iz jednakosti $y=\alpha+x$ dobivamo $\gamma-x=\alpha+x$, $x=\frac{\gamma-\alpha}{2}$. 4 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA