MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
2. travnja 2004. godine

8. razred

1. Dokaži da je broj $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ prirodan.

2. Stranice trokuta ABC leže na pravcima čije jednadžbe su:

$$y=-2x+10, \quad y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}, \quad x+4y-5=0.$$

   Izračunaj koordinate vrhova trokuta ABC i njegovu površinu, te ga nacrtaj u koordinatnom sustavu.

3. Zadana je kružnica $k(S,r)$ i točka T izvan kružnice. Iz točke T povučena je tangenta na kružnicu koja kružnicu dira u točki D. Neka je T' presjek okomice spuštene iz točke D na pravac ST i pravca ST. Dokaži da je $|ST|\cdot|ST'|=r^2$.

4. Iz polovišta jedne katete pravokutnog trokuta spuštena je okomica na hipotenuzu. Dokaži da je razlika kvadrata duljina odsječaka što ga ta okomica čini na hipotenuzi jednaka kvadratu duljine druge katete.

5. Dokaži da je izraz $\left(n^2+n-7\right)\left(n^2+n-3\right)+4$ kvadrat prirodnog broja za svaki prirodan broj n.

ŽUP 2004.

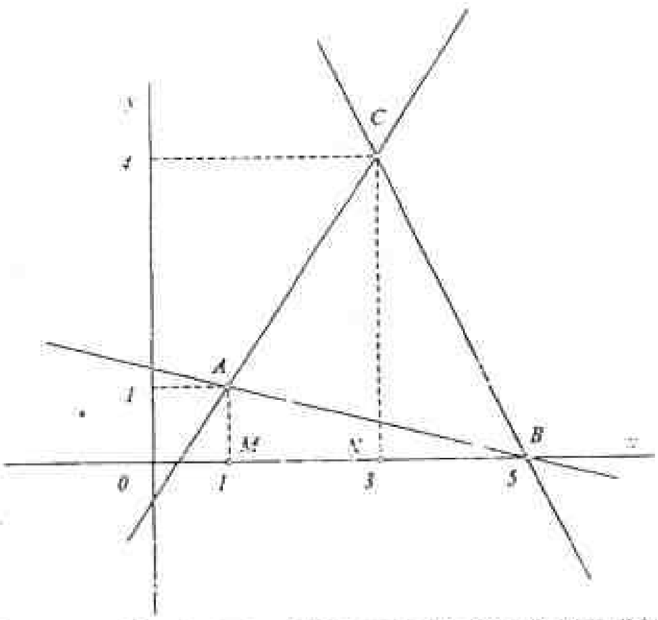
RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Primjenom formule za kvadrat zbroja uočavamo da vrijedi
$7+4\sqrt{3}=4+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+3=2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(2+\sqrt{3})^2.$ 2 BODA
Isto tako primjenom formule za kvadrat razlike imamo
$7+4\sqrt{3}=4-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+3=2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(2-\sqrt{3})^2.$ 2 BODA
Zato je $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3},$ 2 BODA
i isto tako $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}.$ 2 BODA
Prema tome je $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$, što je prirodan broj. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

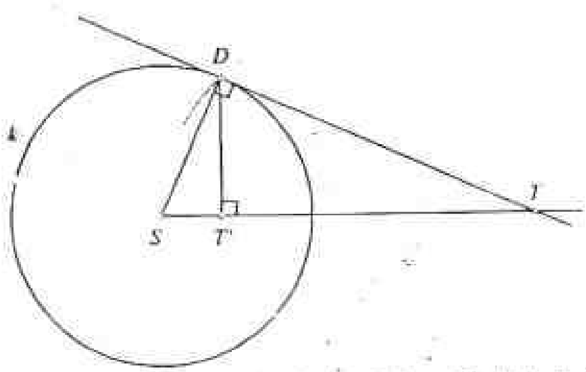
Zadatak se može riješiti i ovako: kvadrirajmo jednakost $x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$. Dobivamo $x^2=16$. Budući da su oba korijena pozitivni brojevi slijedi da je i x pozitivan, pa je $x=4$.

2. Koordinate vrhova dobivamo rješavajući tri sustava: $y=-2x+10$, $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$; $y=-2x+10$, $x+4y-5=0$ i sustava $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$, $x+4y-5=0$. Dobivamo točke $C(3,4)$, $B(5,0)$, $A(1,1)$. 6 bodova
Skica 2 boda



Sad je lako uočiti da se površina trokuta ABC može izračunati kao $P(ABC)=P(MNCA)+P(NBC)-P(AMB)=5+4-2=7.$ 2 boda
.... UKUPNO 10 BODOVA

3.
SKICA 2 BODA



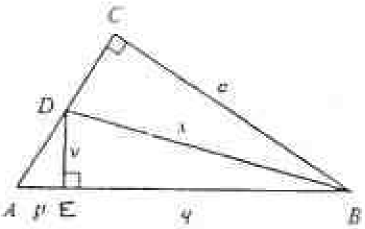
Spojimo točke S i D. Kako je pravac DT tangenta na kružnicu, slijedi da je $\overline{DS}\perp\overline{DT}$, pa je trokut $\triangle DST$ pravokutan. 2 BODA
Nadalje, pravokutni trokuti $\triangle DST$ i $\triangle DST'$ imaju jedan šiljasti kut zajednički. Dakle, jednak im je i drugi šiljasti kut, odakle slijedi da su ti trokuti slični. 2 BODA

. te sličnosti slijedi da je $\dfrac{|DS|}{|ST''|} = \dfrac{|ST|}{|DS|}$, odnosno $|ST| \cdot |ST''| = |DS|^2$. 2 BODA

$\overline{DS}$ je polumjer kružnice, to je $|DS| = r$, pa je $|ST| \cdot |ST''| = r^2$, što je i trebalo pokazati. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. SKICA 1 BOD



Primjenom Pitagorina poučka na trokut $\triangle BDE$ dobivamo $v^2 = x^2 - q^2$. 2 BODA

Isto tako primjenom Pitagorina poučka na $\triangle AED$ dobivamo $v^2 = |AD|^2 - p^2$. 2 BODA

Izjednačavanjem prethodnih dviju relacija imamo da je $x^2 - q^2 = |AD|^2 - p^2$,
odnosno $x^2 = q^2 - p^2 + |AD|^2$ 1 BOD

Nadalje, u trokutu $\triangle BCD$, opet zbog Pitagorina poučka, vrijedi $x^2 = a^2 + |CD|^2$. 2 BODA

Izjednačavanjem izraze x^2 iz prethodnih dviju relacija dobivamo da je
$a^2 + |CD|^2 = q^2 - p^2 + |AD|^2$. 1 BOD

Kako je točka D polovište katete $\overline{AC}$, to je $|AD| = |CD|$ pa dobivamo $a^2 = q^2 - p^2$,
što smo i trebali dokazati. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo $n^2 + n - 7 = m$. Očito je m cijeli broj. 2 BODA

Tada je $n^2 + n - 3 = (n^2 + n - 7) + 4 = m + 4$, što je opet cijeli broj. 2 BODA

Sada imamo da je $(n^2 + n - 7)(n^2 + n - 3) + 4 = m(m + 4) + 4 = m^2 + 4m + 4$. 3 BODA

Konačno, prema formuli za kvadrat zbroja, imamo da je $m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2 = (n^2 + n - 5)^2$,
pa je naš izraz kvadrat cijelog, odnosno prirodnog broja. 3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način. Prvi faktor možemo pisati $(n^2 + n - 5) - 2$. 3 boda

Drugi faktor možemo pisati $(n^2 + n - 5) + 2$. 3 boda

Tada je naš izraz jednak $(n^2 + n - 7)(n^2 + n - 3) + 4 = ((n^2 + n - 5) - 2)((n^2 + n - 5) + 2) + 4 =$
$(n^2 + n - 5)^2 - 4 + 4 = (n^2 + n - 5)^2$. 4 boda