Špelj

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

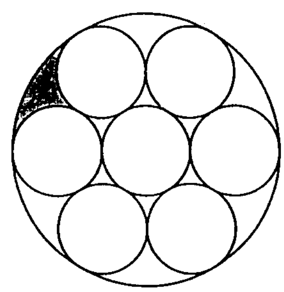
MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2005.

I. razred

1. Sedam kružnica jednakih polumjera smješteno je unutar veće kružnice kao na slici. Ako je polumjer manje kružnice 1, kolika je površina označenog dijela?



2. Dokažite da je za svaki prirodan broj n, broj $n^5 - n$ djeljiv s 30.

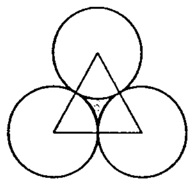
3. Dokažite da je $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ za svaki realan broj x.

4. U kvadratu površine P nalazi se 2005 figura čiji je zbroj površina veći od $2004P$. Dokažite da postoji barem jedna točka zajednička svim figurama.

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Traženu površinu P označenog dijela možemo izračunati na više načina. Navedimo dva.

Prvi način. Šesterostruka površina jednaka je površini većeg kruga, umanjenoj za sedmerostruku površinu malog kruga i za šesterostruku površinu dijela između središnjeg kruga i dva vanjska susjedna. 10 bodova



Površina ovog dijela, P', jednaka je razlici površine jednakostraničnog trokuta stranice 2 i površine tri šestine kruga polumjera 1, tj.

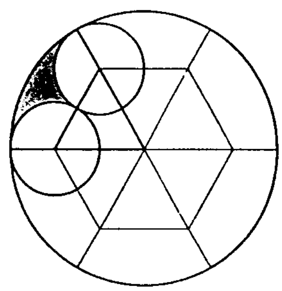
$$P' = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1^2\pi = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}.$$ 5 bodova

Sada je

$$6P = 3^2\pi - 7 \cdot 1^2\pi - 6P' = 5\pi - 6\sqrt{3}.$$ 5 bodova

Stoga je $P = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$. 5 bodova

Drugi način. Tražena površina jednaka je površini jedne šestine većeg kruga umanjenoj za površinu jednakostraničnog trokuta stranice 2, i za dvije trećine površine manjeg kruga. 10 bodova



$$P = \frac{1}{6} \cdot 3^2\pi - \frac{2^2\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{3} \cdot 1^2\pi = \frac{3}{2}\pi - \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}.$$ 15 bodova

2. Izraz $n^5 - n$ možemo faktorizirati:

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1).$$ 5 bodova

Kako je $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ dovoljno je pokazati da je dani broj djeljiv s 2, 3 i 5. 3 bodova

Kako je $(n - 1)n(n + 1)$ umnožak tri uzastopna cijela broja, on djeljiv s 2 2 boda

i s 3. 3 boda

Ako je neki od tih brojeva djeljiv i s 5, $n^5 - n$ je djeljivo s 30. 2 boda

Ako niti jedan od brojeva $n - 1$, n, $n + 1$ nije djeljiv s 5, tada je n oblika $5k \pm 2$, za neki $k \in \mathbb{N}$ pa je

$$n^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 \pm 4k + 1),$$

pa je i u tom slučaju $n^2 + 1$ djeljivo s 5. Znači $n^5 - n$ je djeljivo s 5 za svaki $n \in \mathbb{N}$. 8 bodova

Konačno, to znači da je $n^5 - n$ djeljivo s 30. 2 boda

3. Neka je $P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$.
Razlikujemo sljedeća tri slučaja:

1° Ako je x negativan onda je $x < 0$ i $x^5 < 0$ pa je $P(x) > 0$. 5 bodova

2° $0 \le x < 1 \;\Rightarrow\; 1 - x^3 > 0, \quad 1 - x > 0$ i $x \ge 0$
$\Rightarrow\; P(x) = x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$, 10 bodova

3° $x \ge 1 \;\Rightarrow\; x^3 - 1 \ge 0, \quad x - 1 \ge 0$ i $x > 0$
$\Rightarrow\; P(x) = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1 \ge 1 > 0$. 10 bodova

Dakle, $P(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

4. Dan je kvadrat K unutar kojeg se nalaze figure F_i, $i = 1, 2, \ldots, 2005$, čije površine označimo s $P_i = P(F_i)$.
Uočimo da je zajednička točka svih figura F_i, zapravo točka koja ne leži ni u jednom od skupova $K \backslash F_i$, $\; i = 1, 2, \ldots, 2005$. Dakle, treba pokazati da postoji točka kvadrata koja ne leži u uniji skupova $K \backslash F_i$, $\; i = 1, 2, \ldots, 2005$. 10 bodova

Površina te unije je manja od zbroja površina skupova $K \setminus F_i$. Površina P_i' od $K \setminus F_i$ iznosi $P - P_i$, pa je zbroj svih tih površina

$$P_1' + \ldots + P_{2005}' = 2005P - (P_1 + \ldots + P_{2005})$$

a zbog uvjeta $P_1 + \ldots + P_{2005} > 2004P$ vrijedi
$P_1' + \ldots + P_{2005}' < 2005P - 2004P = P$.
Iz $P_1' + \ldots + P_{2005}' < P$, zaključujemo da je površina unije skupova $K \setminus F_i$ manja od površine kvadrata,
pa sigurno postoji točka kvadrata koja nije u uniji skupova $K \setminus F_i$, dakle leži u svim figurama F_i. 15 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2005.

II. razred

1. Dani su kompleksni brojevi $z = \dfrac{2t-i}{t+i}$ za $t \in \mathbb{R}$.
a) Koje sve vrijednosti može poprimiti $|z|$?
b) Odredite skup parametara t za koje vrijedi

$$|3\,\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z| < 3.$$

2. Nađite sve realne brojeve x, y koji zadovoljavaju jednadžbu

$$(x^2+y^2-4)^2(xy-1)^2 + \sqrt{y^2-x^2} = 0.$$

3. U jednakokračnom trokutu jedan kut iznosi 108°. Dokažite da je omjer duljinâ osnovice i kraka tog trokuta jednak $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Nađite koeficijente a i b takve da polinom ax^5+bx^4+1 bude djeljiv s x^2-x-1.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Kompleksni broj z možemo zapisati u obliku

$$z = \frac{2t-i}{t+i}\cdot\frac{t-i}{t-i} = \frac{2t^2-1}{t^2+1} - \frac{3t}{t^2+1}i,$$

pa je $\operatorname{Re} z = \dfrac{2t^2-1}{t^2+1}$ i $\operatorname{Im} z = -\dfrac{3t}{t^2+1}$. 5 bodova

a)

$$|z|^2 = \frac{(2t^2-1)^2+(3t)^2}{(t^2+1)^2} = \frac{4t^4+5t^2+1}{(t^2+1)^2} = \frac{4t^2+1}{t^2+1} = 4 - \frac{3}{t^2+1}.$$

5 bodova

Kako je $1 \le t^2+1 < \infty$ vrijedi $0 < \dfrac{3}{t^2+1} \le 3$, odnosno
$1 \le 4 - \dfrac{3}{t^2+1} < 4$ i $1 \le |z| < 2$ tj. $|z| \in [1, 2\rangle$. 5 bodova

b) Iz

$$|3\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| = \left|\frac{6t^2-3}{t^2+1} - \frac{3t}{t^2+1}\right| = \frac{|6t^2-3t-3|}{t^2+1} < 3$$

slijedi

$$|2t^2-t-1| < t^2+1 \quad \text{tj.} \quad -t^2-1 < 2t^2-t-1 < t^2+1.$$ 5 bodova

Moramo riješiti dvije nejednadžbe:
1° $-t^2-1 < 2t^2-t-1$ tj. $t(3t-1) > 0$.
Zadovoljava $t \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}, \infty \right\rangle$.

2° $2t^2-t-1 < t^2+1$ tj. $(t+1)(t-2) < 0$.
Zadovoljava $t \in \langle -1, 2\rangle$.

Oba uvjeta su zadovoljena za $t \in \langle -1, 0\rangle \cup \left\langle \frac{1}{3}, 2\right\rangle$. 5 bodova

2. Da bi operacije bile definirane mora biti $y^2 - x^2 \ge 0$ tj. $y^2 \ge x^2$.
Budući da su svi pribrojnici nenegativni, svaki od njih mora biti jednak nuli. 5 bodova
Dakle,

$$\begin{aligned}(x^2+y^2-4)^2(xy-1)^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2=4 \quad \text{ili} \quad xy=1,\\ \sqrt{y^2-x^2} &= 0 \quad \Rightarrow \quad x^2=y^2.\end{aligned}$$

5 bodova

Imamo ova dva slučaja:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4, \\ x^2 = y^2; \end{cases}$$

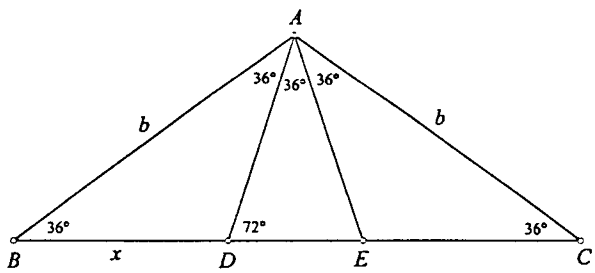
i

$$\begin{cases} xy &= 1. \\ x^2 &= y^2. \end{cases}$$

5 bodova

Odavde dobivamo tražene točke:
$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, 5 bodova
$(1,1)$ i $(-1,-1)$. 5 bodova

3. Neka su vrhovi trokuta A, B, C i neka su D i E točke na stranici $\overline{BC}$ takve da je
$\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAE = 36^\circ$. Označimo $|BD| = x$, $|BC| = a$,
$|AB| = |AC| = b$, $|DC| = a - x$.



ΔABD je jednakokračan, pa je $|BD| = |AD|$,
ΔADC je jednakokračan, pa je $|DC| = |AC|$, $a - x = b$ tj. $x = a - b$. 5 bodova
Iz sličnosti trokuta DAB i ABC dobivamo:

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$ 5 bodova

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{b}{a} \quad / \cdot \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$ 10 bodova

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zadovoljava jedino $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 5 bodova

Napomena. Slično rješenje bazira se na sličnosti $\triangle ADE \sim \triangle BEA$.
Moguće je i trigonometrijsko rješenje.

4. *Prvo rješenje.* Podijelimo li polinom $ax^5 + bx^4 + 1$ sa $x^2 - x - 1$:

$$(ax^5 + bx^4 + 1) : (x^2 - x - 1) = ax^3 + (a+b)x^2 + (2a+b)x + (3a+2b)$$

$$\underline{-ax^5 + ax^4 + ax^3}$$

$$(a+b)x^4 + ax^3 + 1$$

$$\underline{-(a+b)x^4 + (a+b)x^3 + (a+b)x^2}$$

$$(2a+b)x^3 + (a+b)x^2 + 1$$

$$\underline{-(2a+b)x^3 + (2a+b)x^2 + (2a+b)x}$$

$$(3a+2b)x^2 + (2a+b)x + 1$$

$$\underline{-(3a+2b)x^2 + (3a+2b)x + (3a+2b)}$$

$$(5a+3b)x + (3a+2b+1)$$

10 bodova

dobivamo kvocijent polinom trećeg stupnja i kao ostatak linearni polinom

$$(5a+3b)x + (3a+2b+1).$$ 5 bodova

Ostatak dijeljenja mora biti jednak nuli pa dobivamo sistem od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 5a + 3b &= 0 \\ 3a + 2b + 1 &= 0. \end{aligned}$$

5 bodova

Rješenje ovog sistema je $x = 3$ i $y = -5$. 5 bodova

Drugo rješenje. Kako je $x^2 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$,
gdje su $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ rješenja jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$, 5 bodova
vidimo da mora biti $P(\alpha) = 0$ i $P(\beta) = 0$ (jer je poznato da je $P(x)$ djeljiv s $x - c$ ako i samo ako je $P(c) = 0$). 5 bodova

Imamo

$$\begin{aligned} a \cdot \alpha^5 + b \cdot \alpha^4 + 1 &= 0 \\ a \cdot \beta^5 + b \cdot \beta^4 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

5 bodova

odakle možemo, koristeći $\alpha\beta = -1$ i $\alpha + \beta = 1$ (Vièteove formule), dobiti $\alpha = 3$ i $\beta = -5$. 10 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2005.

III. razred

1. Ako je $\log_a b = 10$, izračunajte $\dfrac{\log_a x \cdot \log_x \frac{b}{a}}{\log_x b \cdot \log_{ab} x}$.

2. Za koje vrijednosti parametra α je nejednakost

$$\sin^6 x + \cos^6 x + \alpha \sin x \cdot \cos x \geq 0$$

zadovoljena za sve realne brojeve x ?

3. U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle ABC = 75^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 45^\circ$. Ako je P točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BP| = 2|PC|$, izračunajte kut $\sphericalangle APB$.

4. U raznostraničnom trokutu ABC povučene su težišnica $\overline{CT}$ i visina $\overline{CH}$ na stranicu $\overline{AB}$ (točke T i H leže na stranici $\overline{AB}$). Ako su kutovi $\sphericalangle ACT$ i $\sphericalangle HCB$ jednaki, dokažite da je trokut pravokutan.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Vrijedi redom:

$$\frac{\log_a x \cdot \log_x \frac{b}{a}}{\log_x b \cdot \log_{ab} x} = \frac{\log_a \frac{b}{a}}{\log_{ab} b} \qquad \text{10 bodova}$$

$$= \log_a \frac{b}{a} \cdot \log_b ab = (\log_a b - 1)(\log_b a + 1) \qquad \text{10 bodova}$$

$$= (10-1)(\frac{1}{10}+1) = \frac{99}{10}. \qquad \text{5 bodova}$$

Drugo rješenje. Sve izražavamo pomoću dekadskih logaritama:

$$\frac{\log_a x \cdot \log_x \frac{b}{a}}{\log_x b \cdot \log_{ab} x} = \frac{\frac{\log x}{\log a} \cdot \frac{\log \frac{b}{a}}{\log x}}{\frac{\log b}{\log x} \cdot \frac{\log x}{\log ab}} = \frac{\log \frac{b}{a} \cdot \log ab}{\log a \cdot \log b} \qquad \text{10 bodova}$$

$$= \frac{(\log b - \log a)(\log b + \log a)}{\log a \cdot \log b} = (*). \qquad \text{5 bodova}$$

Iz $\log_a b = 10$ slijedi $\log b = 10 \log a$, 5 bodova
pa je

$$(*) = \frac{9 \log a \cdot 11 \log a}{\log a \cdot 10 \log a} = \frac{99}{10}. \qquad \text{5 bodova}$$

2. *Prvo rješenje.* Vrijedi:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{(1-\cos 2x)^3}{8} + \frac{(1+\cos 2x)^3}{8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x,$$

pa zato polazna nejednakost prelazi u

$$-\frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{\alpha}{2}\sin 2x + 1 \geq 0 \qquad (*) \qquad \text{10 bodova}$$

Fiksirajmo α. Nejednadžba $(*)$ je kvadratna u varijabli $\sin 2x$ koja poprima vrijednosti u intervalu $[-1, 1]$. Zbog negativnog koeficijenta uz kvadratni član, kvadratni trinom poprima minimum na rubovima intervala, pa da bi on bio nenegativan, nužno je i dovoljno da bude nenegativan za rubne vrijednosti $\sin 2x = -1$ i $\sin 2x = 1$, 5 bodova
tj. mora biti

$$-\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2} + 1 \geq 0$$

i

$$-\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{2} + 1 \geq 0 \qquad \text{5 bodova}$$

Odavde dobivamo

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$ 5 bodova

Drugo rješenje. Kao u prvom rješenju dobiva se kvadratna jednadžba

$$-\frac{3}{4}t^2 + \frac{\alpha}{2}t + 1 = 0.$$ 10 bodova

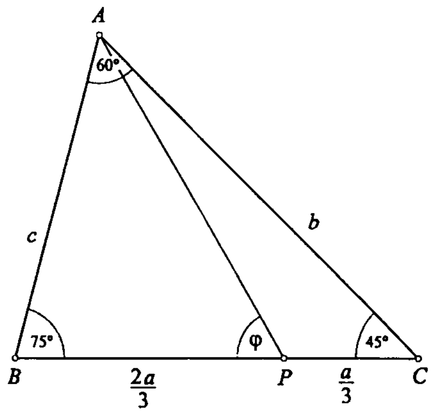
Nužno je da za njezina rješenja t_1, t_2 vrijedi $[-1, 1] \subseteq [t_1, t_2]$ tj.
$t_1 \leq -1$ i $t_2 \geq 1$,. 5 bodova
Rješenja su

$$t_{1,2} = \frac{1}{3}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 12}\right),$$ 5 bodova

pa slijedi $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. 5 bodova

Napomena. Ukoliko učenik koristi neke od potrebnih formula za transformaciju početne nejednakosti na nejednakost $(*)$ ili neku analognu, ali ne uspije transformirati izraz u kvadratnu nejednadžbu poput $(*)$, zadatak treba bodovati s 5 bodova.

3. Neka je $a = |BC|$, $c = |AB|$ i $\varphi = \sphericalangle BPA$.



Prvo rješenje. Prema poučku o sinusima imamo

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$ 5 bodova

Zbog $|BP| = \frac{2}{3}a$ možemo pisati $\frac{|BP|}{c} = \frac{c}{a}$, pa zaključujemo da su trokuti BPA i BAC slični. 10 bodova

Zato je $\varphi = \sphericalangle BAC = 60^\circ$. 10 bodova

Drugo rješenje. Kao i u prvom rješenju imamo

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad (1)$$ 5 bodova

Primijenimo poučak o sinusima na trokut APB:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(105^\circ - \varphi)} = \frac{c}{\frac{2a}{3}}$$ 5 bodova

tj. korištenjem (1)

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(105^\circ-\varphi)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$ 5 bodova

Iz geometrijskih razloga je jasno da jednadžba (2) ima jedinstveno rješenje koje se može i "pogoditi"; naime, $\varphi=60^\circ$ zadovoljava (2). 10 bodova

No, jednadžbu (2) je lako riješiti korištenjem adicijskog teorema i dijeljenjem s $\cos\varphi$; dobivamo $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$, odnosno $\varphi=60^\circ$.

Treće rješenje. Vrijedi

$$2 = \frac{|BP|}{|PC|}=\frac{P(\triangle ABP)}{P(\triangle APC)}=\frac{\frac{1}{2}|AB|\cdot|AP|\sin\sphericalangle BAP}{\frac{1}{2}|AC|\cdot|AP|\sin\sphericalangle CAP}$$ 5 bodova

$$=\frac{|AB|}{|AC|}\frac{\sin(105^\circ-\varphi)}{\sin(\varphi-45^\circ)}$$ 5 bodova

$$=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}\frac{\sin(105^\circ-\varphi)}{\sin(\varphi-45^\circ)}.$$ 5 bodova

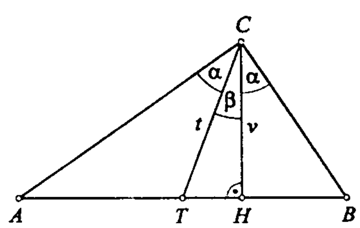
Jednadžbu možemo riješiti korištenjem adicijskog teorema i dijeljenjem s $\cos\varphi$. Tako dobivamo $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$, odnosno $\varphi=60^\circ$. 10 bodova

Napomena. Ako učenik nađe omjer bilo koje dvije stranice trokuta

$$\frac{a}{c}=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ili} \quad \frac{b}{c}=\frac{2}{\sqrt{3}+1} \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b}=\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

za to dobiva 5 bodova.

4. Uvedimo oznake $\alpha=\sphericalangle ACT=\sphericalangle HCB$, $\beta=\sphericalangle TCH$, $c=|AB|$, $t=|CT|$, $v=|CH|$ (vidi sliku).



Prvo rješenje. Vrijedi:

$|AH|=v\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\quad|BH|=v\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $\quad|TH|=v\cdot\operatorname{tg}\beta$. 5 bodova

Kako je $|AT|=|BT|$, tj. $|AH|-|TH|=|BH|+|TH|$, vrijedi

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$$

odnosno

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}\beta.$$ 5 bodova

Nakon sređivanja dobivamo

$$\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta=0,$$

tj.

$$\operatorname{tg}\beta(1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=0.$$

Kako je trokut raznostraničan, ne može biti $\beta=0$, pa je $\operatorname{tg}\beta\neq 0$. 5 bodova

Dijeljenjem s $\operatorname{tg}\beta$ dobivamo

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0,$$

pa je

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha},$$ 5 bodova

odakle je $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$, pa je $\beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha$, tj.
$\measuredangle ACB=2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. 5 bodova

Napomena. Ovo rješenje se temelji na slici na kojoj je $|CB|<|CA|$, ali je slično i u drugom slučaju jer je $\measuredangle ACT=\measuredangle BCH \iff \measuredangle ACH=\measuredangle BCT$.

Drugo rješenje. Primjenom poučka o sinusima na trokute ATC i TBC dobivamo

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin\alpha}=\frac{t}{\sin(90^\circ-\alpha-\beta)} \quad \text{i} \quad \frac{\frac{c}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{t}{\sin(90^\circ-\alpha)},$$ 10 bodova

odnosno

$$\frac{\frac{c}{2}}{t}=\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha},$$

tj.

$$\sin\alpha\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta).$$ 5 bodova

Odatle slijedi

$$\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta).$$

Rješenja ove jednadžbe (uz $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha+\beta<\pi$) su

$$\begin{aligned}2\alpha &= 2\alpha+2\beta,\\ 2\alpha &= \pi-(2\alpha+2\beta).\end{aligned}$$

5 bodova

Prvo otpada jer je $\beta\neq 0$ zbog raznostraničnosti trokuta,

a iz drugog slijedi $\measuredangle ACB=2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. 5 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2005.

IV. razred

1. Na elipsi sa središtem O nalaze se točke A i B takve da je $\sphericalangle AOB = 90°$. Dokažite da udaljenost točke O od pravca AB ovisi samo o duljinama poluosi elipse.

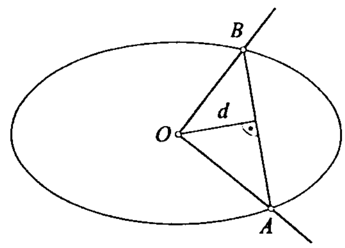
2. Ako su u trokutu duljine stranica a, b, c tri uzastopna člana aritmetičkog niza (u tom poretku), dokažite da za njegove kutove (α je kut nasuprot stranice a, γ nasuprot stranice c) vrijedi:
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}.$$

3. Zadan je rastav skupa prirodnih brojeva:
$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4,5,6\} \cup \{7,8,9,10\} \cup \{11,12,13,14,15\} \cup \ldots$$
Ako je S_k zbroj svih k brojeva u k-tom skupu iz gornjeg rastava, dokažite da vrijedi
$$S_1 + S_3 + S_5 + \ldots + S_{2n-1} = n^4$$
za svaki prirodni broj n.

4. Na krivulji s jednadžbom $y = x^4 - 2x^2$ nalaze se 4 različite točke $T_k = (x_k, y_k)$, $k = 1,2,3,4$. Ako točke T_1, T_2, T_3, T_4 leže na jednom pravcu, dokažite da je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1.



Odaberimo točku O za ishodište koordinatnog sustava. Neka je jednadžba elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, pri čemu su $a, b>0$ duljine njezinih poluosi.

Pretpostavimo najprije da pravci OA i OB nisu paralelni s koordinatnim osima. Ako pravac OA ima koeficijent smjera $k \neq 0$, onda pravac OB ima koeficijent smjera $-\frac{1}{k}$.

$$\begin{array}{llll} OA \ \dots \ y=kx, & & OB \ \dots \ y=-\frac{1}{k}x \\ A \ \dots \ (x_A, y_A), & & B \ \dots \ (x_B, y_B) \end{array}$$

5 bodova

Iz jednadžbi

$$y_A=kx_A, \quad \frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1 \quad \text{te} \quad y_B=-\frac{1}{k}x_B, \quad \frac{x_B^2}{a^2}+\frac{y_B^2}{b^2}=1$$

dobivamo

$$x_A^2=\frac{a^2b^2}{a^2k^2+b^2}, \quad y_A^2=\frac{a^2b^2k^2}{a^2k^2+b^2}, \qquad x_B^2=\frac{a^2b^2k^2}{a^2+b^2k^2}, \quad y_B^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2k^2}.$$

5 bodova

Označimo s d udaljenost točke O od pravca AB. Računajući površinu pravokutnog trokuta OAB na dva načina dobivamo

$$\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|,$$

tj.

$$d=\frac{|OA|\cdot|OB|}{|AB|}=\frac{|OA|\cdot|OB|}{\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}}.$$

5 bodova

Konačno, računamo:

$$|OA|^2=x_A^2+y_A^2=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2k^2+b^2},$$

$$|OB|^2=x_B^2+y_B^2=\frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2+b^2k^2}$$

pa uvrštavanje daje

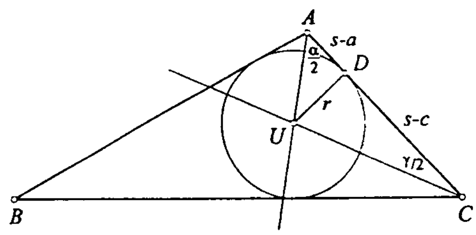
$$\begin{aligned} \frac{1}{d^2}&=\frac{|OA|^2+|OB|^2}{|OA|^2\cdot|OB|^2}=\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}= \\ &=\frac{a^2k^2+b^2}{a^2b^2(1+k^2)}+\frac{a^2+b^2k^2}{a^2b^2(1+k^2)}=\frac{(a^2+b^2)(1+k^2)}{a^2b^2(1+k^2)}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}, \end{aligned}$$

tj.

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad \text{10 bodova}$$

U slučaju kada su pravci OA i OB paralelni s koordinatnim osima gornji račun je trivijalan i opet dobivamo istu formulu za d.

2. *Prvo rješenje.*
Označimo s s poluopseg, s r radijus upisane kružnice i s P površinu trokuta.



Iz pravokutnih trokuta ADU i CDU (sa slike) zaključujemo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}. \qquad \text{5 bodova}$$

Primjenom formule $P = r \cdot s$, tj. $r = \dfrac{P}{s}$, dobivamo

$$(*) \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r^2}{(s-a)(s-c)} = \frac{P^2}{s^2(s-a)(s-c)}. \qquad \text{5 bodova}$$

Prema Heronovoj formuli $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pa imamo dalje

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{s-b}{s} = \frac{a+c-b}{a+c+b}.$$

Iz uvjeta zadatka je $a + c = 2b$

$$\frac{a+c-b}{a+c+b} = \frac{2b-b}{2b+b} = \frac{1}{3}. \qquad \text{15 bodova}$$

Napomena. Zbog uvjeta da su a, b, c uzastopni članovi aritmetičkog niza možemo staviti: $a = b - x$, $c = b + x$. Tada je $s = \dfrac{3b}{2}$. Iz $(*)$ možemo nastaviti ovako

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r^2}{(s-a)(s-c)} = \frac{r^2}{\left(\frac{b}{2}+x\right)\left(\frac{b}{2}-x\right)} = \frac{r^2}{\frac{b^2}{4}-x^2},$$

Kako je $P = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dobivamo

$$r^2 \cdot \frac{9b^2}{4} = \frac{3b}{2}\left(\frac{b}{2}+x\right)\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-x\right), \qquad 3r^2 = \frac{b^2}{4} - x^2.$$

pa je konačno $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r^2}{3r^2} = \dfrac{1}{3}$.

Drugo rješenje. Uvjet $a + c = 2b$, korištenjem poučka o sinusima, može se napisati kao

$$\sin\alpha + \sin\gamma = 2\sin\beta. \qquad \text{5 bodova}$$

Pomoću formule $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, za pretvaranje zbroja trigonometrijskih funkcija u produkt. te formule $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, za sinus dvostrukog kuta, dobivamo

$$2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

što, zbog $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\beta}{2}$, možemo faktorizirati:

$$\cos\frac{\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - 2\sin\frac{\beta}{2}\right) = 0.$$

Budući da je $\cos\frac{\beta}{2} \neq 0$, te $\sin\frac{\beta}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, dobili smo

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = 0.$$ 10 bodova

Primjenom adicijske formule za kosinus, $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$, konačno slijedi

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 0,$$

tj.

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

odakle je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}.$$ 10 bodova

3. U prvih k skupova nalazi se upravo prvih $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ prirodnih brojeva. Zato su u k-tom skupu elementi

$$\frac{(k-1)k}{2} + 1, \ldots, \frac{k(k+1)}{2}.$$ 5 bodova

Zbroj njegovih elemenata je (prema formuli za zbroj članova aritmetičkog niza)

$$S_k = \frac{k}{2}\cdot\left(\frac{(k-1)k}{2} + 1 + \frac{k(k+1)}{2}\right) = \frac{k}{2}(k^2+1).$$ 5 bodova

Konačno je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} S_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2}\left((2k-1)^2+1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(4k^3 - 6k^2 + 4k - 1)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k^4 - (k-1)^4) = n^4 - 0^4 = n^4.\end{aligned}$$

15 bodova

Napomena. Alternativno, u posljednjem računu moguće je koristiti formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ i $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Također, jednakost $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2}\left((2k-1)^2+1\right) = n^4$ se može dokazati i matematičkom indukcijom po n.

4. *Prvo rješenje.*
Pretpostavimo da T_1, T_2, T_3, T_4 leže na pravcu s jednadžbom $y = ax + b$. Tada vrijedi

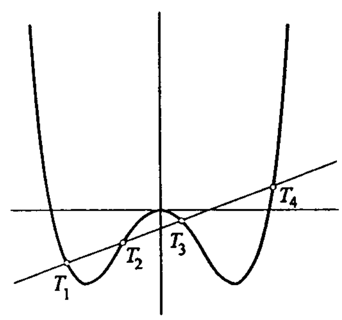
$$x_k^4 - 2x_k^2 = y_k = ax_k + b\,; \quad k = 1,2,3,4$$

pa su x_1, x_2, x_3, x_4 rješenja jednadžbe $x^4 - 2x^2 - ax - b = 0$. 10 bodova

Kako su točke po pretpostavci različite, brojevi x_1, x_2, x_3, x_4 su međusobno različiti. Kako jednadžba četvrtog stupnja ima točno 4 rješenja u skupu kompleksnih brojeva (brojena s odgovarajućim kratnostima), zaključujemo da su x_1, x_2, x_3, x_4 sva rješenja gornje jednadžbe i svako od njih je kratnosti 1. 5 bodova

Koeficijent uz x^3 u gornjoj jednadžbi je jednak 0, pa po Vièteovim formulama dobivamo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. 10 bodova

Drugo rješenje. Kako su točke T_1, T_2, T_3, T_4 različite i koordinate x_1, x_2, x_3, x_4 moraju biti različite.



Ako točke T_1, T_2, T_3, T_4 leže na jednom pravcu, možemo izjednačiti koeficijente smjera pravaca T_1T_2, T_2T_3, T_3T_4:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}.$$ 5 bodova

Uvrštavanje $y_k = x_k^4 - 2x_k^2$; $k = 1,2,3,4$ daje

$$\frac{(x_2^4-x_1^4)-2(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1} = \frac{(x_3^4-x_2^4)-2(x_3^2-x_2^2)}{x_3-x_2} = \frac{(x_4^4-x_3^4)-2(x_4^2-x_3^2)}{x_4-x_3},$$

tj.

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 &= x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3 - 2x_2 - 2x_3 \\ x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3 - 2x_2 - 2x_3 &= x_3^3 + x_3^2x_4 + x_3x_4^2 + x_4^3 - 2x_3 - 2x_4, \end{aligned}$$

što je ekvivalentno s

$$\begin{aligned} (x_1-x_3)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2^2 - 2) &= 0 \\ (x_2-x_4)(x_2^2 + x_2x_4 + x_4^2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_3^2 - 2) &= 0. \end{aligned}$$

10 bodova

Sada imamo

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 2 &= 0 \\ x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - 2 &= 0. \end{aligned}$$

a oduzimanjem tih jednakosti dobivamo

$$x_1^2 - x_4^2 - x_1(x_2 + x_3) - x_4(x_2 + x_3) = 0.$$

tj.

$$(x_1 - x_4)(x_1 + x_4 + x_2 + x_3) = 0$$

pa je

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \qquad \text{10 bodova}$$