MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

8. travnja 2005.

I. razred

1. Odredite sve trojke realnih brojeva x, y, z za koje vrijedi

$$4xyz - x^4 - y^4 - z^4 = 1.$$

2. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$ odabrane su redom točke E i F takve da je $EF \parallel BD$. Dokažite da trokuti BCE i CDF imaju jednake površine.

3. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1,$$

dokažite nejednakost

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

4. Dokažite da je

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2004^2} + \frac{1}{2005^2}} = 2005 - \frac{1}{2005}.$$

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Transformirajmo jednadžbu u pogodniji oblik:

$$\begin{aligned} 4xyz &= (1+x^4)+(y^4+z^4) \\ 4xyz &= (1-x^2)^2+2x^2+(y^2-z^2)^2+2y^2z^2 \\ 0 &= (1-x^2)^2+(y^2-z^2)^2+2(x^2-2xyz+y^2z^2) \\ 0 &= (1-x^2)^2+(y^2-z^2)^2+2(x-yz)^2. \end{aligned}$$

Napomena. I slično svedeno na oblik "suma kvadrata = 0". 15 bodova
Odavde dobivamo: $x^2=1, \quad y^2=z^2, \quad x=yz,$ 5 bodova
odakle je $(x,y,z)\in\{(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1)\}$. 5 bodova

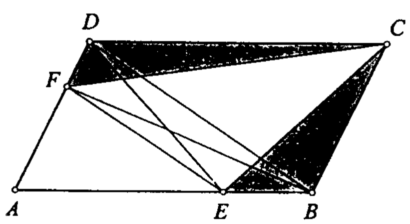
Drugo rješenje. Koristimo nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine:

$$xyz=\frac{x^4+y^4+z^4+1}{4}\overset{A-G}{\geq}\sqrt[4]{x^4\cdot y^4\cdot z^4\cdot 1}=|xyz|\geq xyz.$$

10 bodova
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x^4=y^4=z^4=1$ 5 bodova
i $xyz\geq 0$, 5 bodova
odakle se dobivaju rješenja:
$(x,y,z)\in\{(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1)\}$. 5 bodova

Napomena. Ako učenik samo pogodi rješenje $x=y=z=1$, onda je to 0 bodova. Ako pogodi sva četiri rješenja, onda dobiva 5 bodova.

2. *Prvo rješenje.* Primijetimo najprije da trokuti CDF i BDF imaju zajedničku osnovicu $\overline{DF}$ i jednake duljine visina na nju (jer je $DF \parallel BC$), pa je $P(CDF)=P(BDF)$. 8 bodova

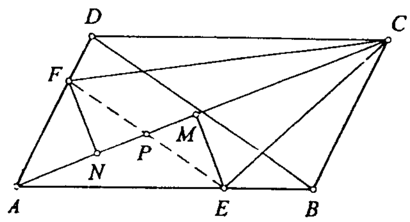


Zatim, trokuti BDF i BDE imaju zajedničku osnovicu $\overline{BD}$ i jednake duljine visina na nju (jer je $BD \parallel EF$), pa je $P(BDF)=P(BDE)$. 9 bodova

Konačno, trokuti BDE i BCE imaju zajedničku osnovicu $\overline{BE}$ i jednaku visinu na nju (jer je $BE \parallel CD$), pa je $P(BDE)=P(BCE)$. 8 bodova

Odavde je $P(BCE)=P(CDF)$.

Drugo rješenje. Kako je $P(ABC) = P(ACD)$, dovoljno je pokazati da je $P(AEC) = P(AFC)$. 5 bodova



Neka je P sjecište pravaca AC i EF. Točka P je polovište dužine $\overline{EF}$, 5 bodova

pa su trokuti EMP i FNP sukladni (jednaki kutovi i jedna stranica). Dakle, $|EM| = |FN|$. 10 bodova

No, trokuti AEC i ACF imaju zajedničku osnovicu $\overline{AC}$ i duljine visina $\overline{EM}$ i $\overline{FN}$, pa su im površine jednake. 5 bodova

3. *Prvo rješenje.* Množenjem dane jednakosti s abc dobivamo

$$ab + bc + ca = abc. \qquad (*)$$ 3 boda

Sada imamo

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1 \\ &= a + b + c - 1 \quad (\text{zbog } (*)).\end{aligned}$$

7 bodova

Nadalje,

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) &= 3 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \\ &\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9,\end{aligned}$$ 10 bodova

$$\Longrightarrow \quad a + b + c \geq 9, \quad \text{tj.}$$

$$(a-1)(b-1)(c-1) = a + b + c - 1 \geq 8.$$ 5 bodova

Druga ideja. Alternativno rješenje pomoću nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine:

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3} \quad \Rightarrow \quad a+b+c \geq 9,$$

i nadalje prema prvom rješenju.

4. Uočimo da je

$$1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}=\left(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right)^2.$$

10 bodova

Zato je

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} &= \frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\\ &= 1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

5 bodova

Konačno imamo

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}}\\ =&\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\right)\\ =&\ 2004\cdot 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2004}-\frac{1}{2005}\\ =&\ 2004+1-\frac{1}{2005}=2005-\frac{1}{2005}.\end{aligned}$$

10 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

8. travnja 2005.

II. razred

1. Trokutu ABC upisana je kružnica polumjera r sa središtem u točki S. Pravac kroz točku S siječe stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama D i E. Dokažite da za površinu P trokuta CED vrijedi $P \geq 2r^2$. Kada vrijedi jednakost?

2. Nađite sve parove cijelih brojeva a i b za koje vrijedi

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

3. Neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(5) = 2005$. Može li broj $P(2005)$ biti potpun kvadrat (kvadrat prirodnog broja)?

4. Dano je 99 (ne nužno različitih) prirodnih brojeva manjih od 100. Ako zbroj nikoja dva, tri ili više od tih brojeva nije djeljiv sa 100, dokažite da su svi oni međusobno jednaki.

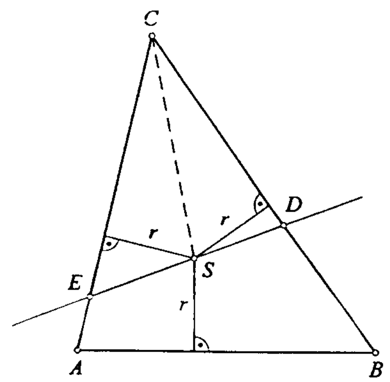
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Za površinu P trokuta CED vrijedi:

$$P = P(CES) + P(CSD) = \frac{1}{2}|CE| \cdot r + \frac{1}{2}|CD| \cdot r = \frac{|CE| + |CD|}{2} \cdot r.$$

5 bodova



Zbog A-G nejednakosti imamo

$$\frac{|CE| + |CD|}{2} \geq \sqrt{|CE| \cdot |CD|},$$

pa je $P \geq \sqrt{|CE| \cdot |CD|} \cdot r$.
Umnožak duljina dviju stranica trokuta nije manji od dvostruke površine trokuta. U našem slučaju je $|CE| \cdot |CD| \geq 2P$, pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je kut γ u vrhu C pravi. 10 bodova

Zato je $P \geq \sqrt{|CE| \cdot |CD|} \cdot r \geq \sqrt{2P} \cdot r$, pa slijedi $P^2 \geq 2Pr^2$ odnosno $P \geq 2r^2$, što je i trebalo dokazati. 5 bodova

Jednakost u dokazanoj nejednakosti vrijedi ako je $|CE| = |CD|$ i $\gamma = 90°$. 5 bodova

2. Jednadžbu napišimo kao kvadratnu jednadžbu po b:

$$5b^2 + (5a - 14)b + 5a^2 - 7a = 0,$$

čija su rješenja

$$b_{1,2} = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{(5a-14)^2 - 20(5a^2 - 7a)}}{10} = \frac{14 - 5a \pm \sqrt{196 - 75a^2}}{10}.$$

5 bodova

Da bi rješenja bila realna, mora biti $196 - 75a^2 \geq 0$ tj.
$a^2 \leq \frac{196}{75}$. Dakle. $-\frac{14}{5\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{14}{5\sqrt{3}}$. 5 bodova

Budući da a mora biti cijeli broj, može biti samo $a \in \{-1, 0, 1\}$. 5 bodova

Uvrštavanjem tih vrijednosti u izraz za $b_{1,2}$ dobivamo:

1° $a = -1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 3,\ b_2 \notin \mathbb{Z}$;

2° $a = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 \notin \mathbb{Z},\ b_2 = 0$;

3° $a = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 2,\ b_2 \notin \mathbb{Z}$.

Rješenja dane jednadžbe su $(a,b) \in \{(-1,3),(0,0),(1,2)\}$. 10 bodova

Napomena. Danu jednadžbu možemo promatrati i kao kvadratnu jednadžbu po a:

$$5a^2 + (5b-7)a + 5b^2 - 14b = 0.$$

U ovom slučaju rješenja su

$$a_{1,2} = \frac{7 - 5b \pm \sqrt{49 + 210b - 75b^2}}{10}.$$

Iz uvjeta $49 + 210b - 75b^2 \geq 0$ slijedi $b \in \{0,1,2,3\}$. Uvrštavajem se vidi da su rješenja $(a,b) \in \{(-1,3),(0,0),(1,2)\}$.

3. Neka je $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ promatrani polinom s cjelobrojnim koeficijentima n-tog stupnja. Tada imamo:

$$\begin{aligned} P(5) &= a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 5 + a_0, \\ P(2005) &= a_n \cdot 2005^n + a_{n-1} \cdot 2005^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2005 + a_0. \end{aligned}$$

Oduzimanjem dobivamo

$$\begin{aligned} &P(2005) - P(5) \\ = \ &a_n(2005^n - 5^n) + a_{n-1}(2005^{n-1} - 5^{n-1}) + \ldots + a_1(2005 - 5) + a_0, \qquad (*) \end{aligned}$$

5 bodova

$$2005^k - 5^k = 2000(2005^{k-1} + 2005^{k-2} \cdot 5 + \ldots + 2005 \cdot 5^{k-2} + 5^{k-1})$$

Izrazi u zagradama u $(*)$ djeljivi su s 2000, 5 bodova
pa je $P(2005) - P(5) = 2000A$, za neki cijeli broj A.
Dakle, $P(2005) = 2000A + 2005$. 5 bodova

Broj $P(2005)$ završava znamenkama 05, pa ne može biti kvadrat prirodnog broja. 10 bodova

4. Neka su $n_1, n_2, \ldots, n_{99}$ dani brojevi s navedenim svojstvom. Pretpostavimo suprotno, tj. da među njima postoje dva različita broja, npr. $n_1 \neq n_2$.

Promatrajmo sljedećih 100 brojeva:

$s_1 = n_1,\ s_2 = n_2,\ s_3 = n_1 + n_2,\ \ldots,\ s_{100} = n_1 + n_2 + \ldots + n_{99}$. 5 bodova

Po pretpostavci niti jedan od brojeva s_i, $i = 1, 2, \ldots, 100$ nije djeljiv sa 100. Po Dirichletovom principu, zaljučujemo da bar dva od tih brojeva imaju isti ostatak pri dijeljenju sa 100.
Neka su to brojevi s_k i s_l, $k > l$. Očito to nisu s_1 i s_2. 10 bodova
Kako s_k i s_l daju isti ostatak pri dijeljenju sa 100, njihova razlika $s_k - s_l$ djeljiva je sa 100, tj.

$$100 \mid (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - (n_1 + n_2 + \ldots + n_l), \qquad \text{tj.}$$

$$100 \mid (n_{l+1} + \ldots + n_k),$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom da zbroj bilo kojih od danih brojeva nije djeljiv sa 100. Zato su svi oni međusobno jednaki. 10 bodova

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

8. travnja 2005.

III. razred

1. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je broj
$$2^4 + 2^7 + 2^n$$
potpun kvadrat.

2. U trokutu s kutovima α, β i γ vrijedi jednakost
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin \gamma.$$
Ako je poznato da su kutovi α i β šiljasti, dokažite da je kut γ pravi.

3. Neka je T točka unutar trostrane piramide $ABCD$ i neka su točke A_1, B_1, C_1, D_1 presjecišta pravaca AT, BT, CT, DT s nasuprotnim stranama piramide, redom. Ako je
$$\frac{|AT|}{|TA_1|} = \frac{|BT|}{|TB_1|} = \frac{|CT|}{|TC_1|} = \frac{|DT|}{|TD_1|} = \lambda,$$
koje sve vrijednosti može λ poprimiti? Obrazložite odgovor!

4. Trokut ABC je šiljastokutan. Za bilo koju točku T iz unutrašnjosti ili s ruba trokuta ABC, točke T_a, T_b, T_c su redom nožišta okomica iz T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Ako je
$$f(T) = \frac{|AT_c| + |BT_a| + |CT_b|}{|TT_a| + |TT_b| + |TT_c|},$$
dokažite da $f(T)$ ne ovisi o izboru točke T ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Budući da je $2^4 + 2^7 = 144 = 12^2$, ako stavimo

$$144 + 2^n = m^2,$$

za prirodni broj m, onda je

$$2^n = m^2 - 144 = (m - 12)(m + 12).$$ 3 boda

Svaki od faktora na desnoj strani mora biti potencija broja 2.
Neka je

$$\begin{aligned} m + 12 &= 2^p, \\ m - 12 &= 2^q, \end{aligned}$$

pri čemu je $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p + q = n$ i $p > q$. 7 bodova
Oduzimanjem gornjih jednadžbi dobiva se

$$2^q(2^{p-q} - 1) = 2^3 \cdot 3.$$ 5 bodova

Budući da je faktor $2^{p-q} - 1$ neparan, a 2^q potencija od 2, ova jednadžba ima samo jedno rješenje i to $q = 3$ i $p - q = 2$. Dakle, $p = 5$ i $q = 3$, odnosno

$$n = p + q = 8$$

je jedini prirodni broj za koji je zadani izraz potpuni kvadrat. 10 bodova

Napomena. Zadatak je moguće riješiti i izlučivanjem 2^4 uz pretpostavku da je $n > 3$. Tada će zbog

$$2^4 + 2^7 + 2^n = 2^4(1 + 8 + 2^{n-4}),$$

polazni izraz biti potpuni kvadrat ako i samo ako je $9 + 2^{n-4}$ potpuni kvadrat. Od ovog mjesta zadatak se rješava kao u gornjem rješenju i u skladu s time boduje.
Međutim, u ovom načinu rješavanja mora se provjeriti da promatrani izraz nije potpuni kvadrat za $n = 1, 2, 3$. Izravnom provjerom se dobije $2^4 + 2^7 + 2^n = 146, 148, 152$, a to nisu potpuni kvadrati. Učenik koji zaboravi to provjeriti, a riješi zadatak na ovaj način gubi 3 boda.

2. Budući da je zbroj kutova u trokutu jednak π, koristeći adicijski teorem, zadana jednakost se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \sin^2\beta &= \sin(\pi - (\alpha + \beta)) \\ &= \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

3 boda

Prebacivanjem članova sa $\sin\alpha$ na lijevu, a onih sa $\sin\beta$ na desnu stranu jednakosti dobiva se

$$\sin\alpha(\sin\alpha - \cos\beta) = \sin\beta(\cos\alpha - \sin\beta). \qquad (1)$$

Koristeći formulu $\cos\phi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ i formulu za razliku sinusa, izrazi u zagradi se zapišu kao umnošci:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha - \cos\beta &= \sin\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \\
&= 2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{2} + \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2} \\
&= 2\sin\frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4}\cos\frac{2\alpha - 2\beta + \pi}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha - \sin\beta &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\beta \\
&= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta}{2} \\
&= -2\sin\frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4}\cos\frac{2\beta - 2\alpha + \pi}{4}
\end{aligned}
$$

Na taj način jednakost (1) postaje

$$
\begin{aligned}
&2\sin\alpha\sin\frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4}\cos\frac{2\alpha - 2\beta + \pi}{4} \\
= \quad &-2\sin\beta\sin\frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4}\cos\frac{2\beta - 2\alpha + \pi}{4}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

7 bodova

Ideja dokaza da je kut γ pravi jest usporedba predznaka lijeve i desne strane jednakosti (2). 3 boda

Napomena: Učeniku koji koristi ovu ideju, čak iako ne riješi zadatak dati [redacted] 3 boda.

Najprije, očito je da su $\sin\alpha$ i $\sin\beta$ pozitivni (jer su α i β kutovi trokuta). Nadalje, budući da su α i β šiljasti vrijede (stroge) nejednakosti

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}, \\
-\frac{\pi}{2} < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{2\alpha - 2\beta + \pi}{4} < \frac{\pi}{2}, \\
0 < \frac{2\beta - 2\alpha + \pi}{4} < \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Stoga su i faktori s kosinusom na obje strane jednakosti (2) pozitivni. Na kraju, budući da je preostali faktor $\sin\frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4}$ zajednički na obje strane u (2) zaključujemo da će strane te jednakosti imati jednake predznake jedino ako vrijedi

$$\sin\frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4} = 0.$$

7 bodova

Kutovi α i β su šiljasti pa je $0 < \alpha + \beta < \pi$ odnosno

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4} < \frac{\pi}{4}.$$

Stoga je gornji sinus jednak nuli jedino ako vrijedi

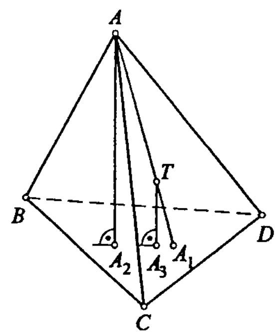
$$\frac{2\alpha + 2\beta - \pi}{4} = 0$$

odakle slijedi $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, odnosno $\gamma = \frac{\pi}{2}$. 5 bodova

3. Prvi korak u rješenju ovog zadatka je zapisati zadani omjer koristeći volumene određenih piramida. Točnije dokažimo da vrijedi

$$\frac{|AA_1|}{|TA_1|} = \frac{V(ABCD)}{V(TBCD)}. \qquad (3)$$

3 boda



Neka je točka A_2 nožište visine iz vrha A piramide $ABCD$, a točka A_3 nožište visine iz vrha T piramide $TBCD$ kao na slici. Te dvije visine su paralelne, a točke A_1, A_2 i A_3 leže na istom pravcu (ortogonalnoj projekciji pravca AA_1 na ravninu baze BCD), pa su trokuti AA_1A_2 i TA_1A_3 slični.

Stoga vrijedi

$$\frac{|AA_1|}{|TA_1|} = \frac{|AA_2|}{|TA_3|} = \frac{\frac{1}{3}|AA_2|P(BCD)}{\frac{1}{3}|TA_3|P(BCD)} = \frac{V(ABCD)}{V(TBCD)},$$

i time smo dokazali (3). 7 bodova

Budući da je $|AA_1| = |AT| + |TA_1|$ i $\lambda = \frac{|AT|}{|TA_1|}$, iz (3) slijedi

$$\lambda + 1 = \frac{V(ABCD)}{V(TBCD)},$$

odnosno,

$$\frac{V(TBCD)}{V(ABCD)} = \frac{1}{\lambda + 1}. \qquad (4)$$

5 bodova

Na isti način se dokažu jednakosti analogne (4) za preostala tri vrha piramide:

$$\frac{V(TACD)}{V(ABCD)} = \frac{V(TABD)}{V(ABCD)} = \frac{V(TABC)}{V(ABCD)} = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

Zbrajanjem tih četiriju jednadžbi i koristeći činjenicu

$$V(ABCD) = V(TBCD) + V(TACD) + V(TABD) + V(TABC),$$ 5 bodova

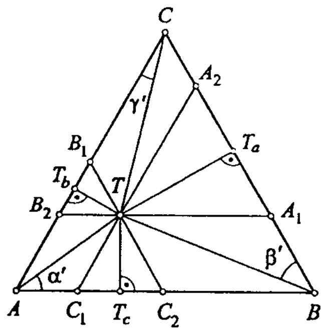
dobiva se

$$1 = \frac{4}{\lambda + 1}.$$ 3 boda

Ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $\lambda = 3$, pa je to jedina vrijednost koju λ može poprimiti. 2 boda

4. Neka je trokut jednakostraničan. Dokažimo da tada $f(T)$ ne ovisi o odabiru točke T, tj. da je f konstanta.

Za proizvoljnu točku T jednakostraničnog trokuta stranice a neka su A_1 i A_2 točke na $\overline{BC}$, B_1 i B_2 točke na $\overline{CA}$ i C_1 i C_2 točke na $\overline{AB}$ takve da su A_1B_2, B_1C_2 i C_1A_2 pravci kroz točku T, paralelni sa stranicama AB, BC, CA redom.



Trokuti TA_1A_2, TB_1B_2 i TC_1C_2 su jednakostranični, i njihove visine su TT_a, TT_b i TT_c redom. Zato vrijedi

$$\begin{aligned} |TT_a| + |TT_b| + |TT_c| &= |AA_1| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + |TB_1| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + |C_2T| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= (|AA_1| + |TB_1| + |C_2T|) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

3 boda

i

$$\begin{aligned} |AT_c| + |BT_a| + |CT_b| &= (|AC_1| + |C_1T_c|) + (|BA_1| + |A_1T_a|) \\ &\quad + (|CB_1| + |B_1T_b|) \\ &= \left(|TB_1| + \frac{1}{2}|C_2T|\right) + \left(|BA_1| + \frac{1}{2}|A_1A_2|\right) \\ &\quad + \left(|A_2T| + \frac{1}{2}|TB_1|\right) \\ &= \frac{3}{2}(|BA_1| + |A_1A_2| + |A_2C|) = \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

3 boda

Dakle, za proizvoljnu točku T jednakostraničnog trokuta ABC vrijedi

$$f(T) = \frac{3a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

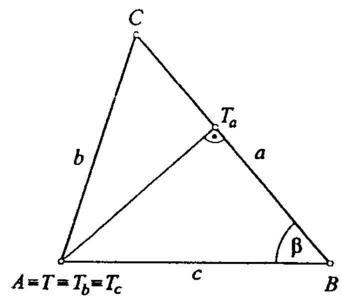
pa $f(T)$ ne ovisi o odabiru točke T. Time je dokazan jedan smjer. 1 bod

Dokažimo drugi smjer. Pretpostavimo da $f(T)$ ne ovisi o odabiru točke T i dokažimo da tada trokut mora biti jednakostraničan.

Izračunajmo vrijednost $f(T)$ za vrhove trokuta A, B i C. Zbog pretpostavke da $f(T)$ ne ovisi o T mora biti

$$f(A) = f(B) = f(C). \qquad \text{3 boda}$$

Napomena. Ako učenik umjesto vrhova odabere neke druge tri točke, zadatak se boduje analogno.



Za $T = A$, točke T_b i T_c se podudaraju s točkom A, a T_a je nožište visine iz vrha A. Ako označimo stranice nasuprot vrhova A, B i C s a, b i c, te kutove trokuta uz vrhove A, B i C s α, β i γ, imamo:

$$|TT_b| = |TT_c| = 0, \quad |TT_a| = c\sin\beta,$$

$$|AT_c| = 0, \quad |BT_a| = c\cos\beta, \quad |CT_b| = b.$$

Sada lako dobivamo $f(A) = \dfrac{c\cos\beta + b}{c\sin\beta}$. 3 boda

Odavde možemo nastaviti na više načina.

Prvi način:
Koristeći kosinusov poučak (ako s P označimo površinu trokuta ABC) dobivamo

$$f(A) = \frac{2ac\cos\beta + 2ab}{2ac\sin\beta} = \frac{2ab + a^2 + c^2 - b^2}{4P} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2b(a-b)}{4P}.$$

3 boda

Na isti način za preostala dva vrha vrijedi:

$$f(B) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b-c)}{4P},$$

$$f(C) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2a(c-a)}{4P}. \qquad \text{2 boda}$$

Po pretpostavci $f(T)$ ne ovisi o odabiru točke T pa gornja tri izraza za $f(A)$, $f(B)$ i $f(C)$ moraju biti jednaka. Stoga,

$$b(a-b) = c(b-c) = a(c-a) = x. \qquad (5) \qquad \text{2 boda}$$

Budući da su stranice trokuta $a, b, c \neq 0$, zbrajanjem jednakosti

$$a - b = \frac{x}{b}, \qquad b - c = \frac{x}{c}, \qquad c - a = \frac{x}{a},$$

dobivamo

$$0 = x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Izraz u zagradi je različit od nule pa je $x = 0$. Sada iz (5), slijedi

$$a = b = c,$$

što smo i trebali dokazati. 5 bodova

Drugi način: Imamo $f(A) = \dfrac{c\cos\beta + b}{c\sin\beta}$, i analogno:

$$f(B) = \frac{a\cos\gamma + c}{a\sin\gamma}, \qquad f(C) = \frac{b\cos\alpha + a}{b\sin\alpha}.$$ 2 boda

Po pretpostavci $f(T)$ ne ovisi o odabiru točke T pa gornja tri izraza za $f(A)$, $f(B)$ i $f(C)$ moraju biti jednaka. Stoga,

$$\frac{c\cos\beta + b}{c\sin\beta} = \frac{a\cos\gamma + c}{a\sin\gamma} = \frac{b\cos\alpha + a}{b\sin\alpha}.$$ 2 boda

Iz jednakosti $\dfrac{c\cos\beta + b}{c\sin\beta} = \dfrac{b\cos\alpha + a}{b\sin\alpha}$ slijedi redom

$$\begin{aligned}
b\,c\cos\beta\ \sin\alpha + b^2\sin\alpha &= b\,c\cos\alpha\ \sin\beta + a\,c\sin\beta \\
b\,c\sin(\alpha-\beta) + b^2\sin\alpha &= a\,c\sin\beta\ =\ 2P \\
b\,c\sin(\alpha-\beta) &= b\,c\sin\alpha - b^2\sin\alpha \\
c\sin(\alpha-\beta) &= (c-b)\sin\alpha
\end{aligned}$$

odnosno, zbog poučka o sinusima

$$\sin\gamma\ \sin(\alpha-\beta) = (\sin\gamma - \sin\beta)\ \sin\alpha.$$ 3 boda

Analogno je

$$\sin\alpha\ \sin(\beta-\gamma) = (\sin\alpha - \sin\gamma)\ \sin\beta$$

$$\sin\beta\ \sin(\gamma-\alpha) = (\sin\beta - \sin\alpha)\ \sin\gamma \tag{6}$$

Množenjem ove tri jednakosti, nakon skraćivanja sa $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \neq 0$ dobiva se:

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha) = (\sin\gamma - \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\gamma)(\sin\beta - \sin\alpha).$$

Dalje zbog $\sin(x-y) = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ i
$\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$ imamo:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} =$$

$$= \sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2},$$

odnosno

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} + \cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right) = 0.$$

Kako su α, β, γ šiljasti kutovi u trokutu, izraz u zagradi je pozitivan, pa mora biti

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}=0.$$

Neka je $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$. Tada mora biti $\alpha=\beta$ pa iz (6) slijedi $\gamma=\alpha$, tj. trokut je jednakostraničan, što smo i trebali dokazati. 5 bodova

Napomena. Slično se dobiva i ako zapišemo $f(A)=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}$.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

8. travnja 2005.

IV. razred

1. Pokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ vrijedi

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1) - \log_{\frac{3}{2}}(k^3-1) \right) < 1 .$$

2. Neka je S točka na stranici $\overline{AB}$ danog šiljastokutnog trokuta ABC i neka su P i Q središta kružnica opisanih trokutima ASC i BSC. Odredite položaj točke S (na stranici $\overline{AB}$) tako da trokut PQS ima najmanju moguću površinu.

3. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je rekurzivno:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_n &= \frac{4n-2}{n}\, a_{n-1}, \quad n \geq 2 . \end{aligned}$$

Dokažite da su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

4. Prirodni brojevi a, b i c zadovoljavaju jednakost

$$c(ac+1)^2 = (5c+2b)(2c+b).$$

a) Ako je c neparan, dokažite da je on potpun kvadrat.
b) Može li c biti paran?

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1.

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1)-\log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\log_{\frac{3}{2}}\frac{k^3+1}{k^3-1}$$

$$= \log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}$$ 5 bodova

$$= \log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{(k-1)(k^2+k+1)}$$

$$= \log_{\frac{3}{2}}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}\right)$$ 2 boda

Uočimo da je

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}.$$

5 bodova

i

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}$$

$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{13}{21}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)^2-(n-1)+1}{(n-1)^2+(n-1)+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}$$

$$= \frac{3}{n^2+n+1}, \qquad (*)$$

jer je $(k-1)^2+(k-1)+1=k^2-k+1$. 8 bodova

Napomena: Ukoliko učenik dobije rezultat $(*)$ ali ne obrazloži $(**)$, dobiva samo 5 bodova.

Konačno imamo

$$\sum_{k=2}^{n}\Big(\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1)-\log_{\frac{3}{2}}(k^3-1)\Big)$$

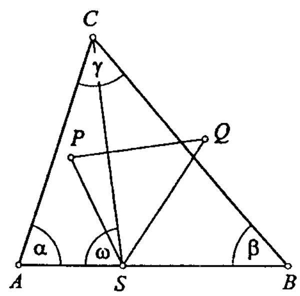
$$= \log_{\frac{3}{2}}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}\right)$$

$$= \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{3}{n^2+n+1}\right)$$

$$= \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right) < \log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{2} = 1.$$

5 bodova

2. *Prvo rješenje.*



Neka je $\omega = \sphericalangle ASC$. Kako su $|SP|$ i $|SQ|$ polumjeri kružnica opisanih trokutima SAC i SBC, vrijedi

$$|SP| = \frac{|AC|}{2\sin\omega} \quad \text{i} \quad |SQ| = \frac{|BC|}{2\sin\omega}.$$

5 bodova

Također, zbog poučka o obodnom i središnjem kutu imamo

$$\begin{aligned}\sphericalangle PSQ &= \sphericalangle PSC + \sphericalangle QSC\\ &= (90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle SPC) + (90^\circ - \tfrac{1}{2}\sphericalangle SQC)\\ &= (90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma.\end{aligned}$$

5 bodova

Površina trokuta SPQ iznosi

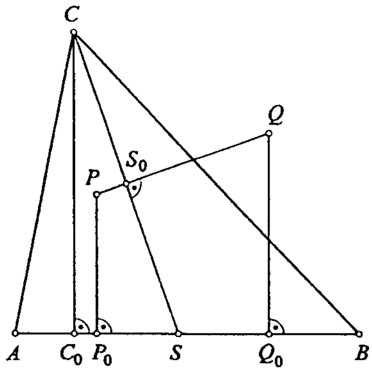
$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}|SP|\cdot|SQ|\cdot\sin\sphericalangle PSQ = \frac{|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\gamma}{8\sin^2\omega}\\ &= \frac{P(ABC)}{4\sin^2\omega}.\end{aligned}$$

10 bodova

Minimum se očito postiže kad je $\sin^2\omega = 1$, tj. za $\omega = 90^\circ$.
Tada je točka S nožište visine iz vrha C. 5 bodova

Drugo rješenje. Spojnica središta P i Q siječe zajedničku tetivu dviju kružnica $\overline{CS}$ u polovištu, nazovimo ga S_0, i to pod pravim kutem. Zato je površina trokuta PQS jednaka $\frac{1}{2}|PQ| \cdot |SS_0|$. 5 bodova

Neka su P_0 i Q_0 nožišta okomica iz P, Q na $\overline{AB}$. Točka P_0 je polovište dužine $\overline{AS}$ (jer je $\overline{AS}$ tetiva kružnice sa središtem P), a točka Q_0 je polovište od $\overline{BS}$.



Zato je

$$\begin{aligned} P(PQS) &= \frac{1}{2}|PQ| \cdot |SS_0| \geq \frac{1}{2}|P_0Q_0| \cdot |SS_0| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{1}{2}|CS| \geq \frac{1}{8} \cdot |AB| \cdot |CC_0| \\ &= \frac{1}{4} \cdot P(ABC), \end{aligned}$$

gdje je s C_0 označeno nožište visine iz C. 10 bodova

U prvoj nejednakosti jednakost je ispunjena samo ako je $PQ \parallel AB$, a u drugoj samo ako je $CS \perp AB$. No, to je zapravo isti uvjet pa zaključujemo da točka S mora biti nožište visine iz vrha C. 10 bodova

Treće rješenje. Zbog poučka o obodnom i središnjem kutu vrijedi

$$\sphericalangle SPQ = \frac{1}{2} \sphericalangle SPC = \sphericalangle SAC = \sphericalangle BAC,$$

a analogno je i $\sphericalangle SQP = \sphericalangle ABC$.

Zato su trokuti PQS i ABC slični. 10 bodova

Ako je $k = |PS|/|AC|$ koeficijent sličnosti, onda vrijedi $P(PQS) = k^2 P(ABC)$. Kako je $\overline{AC}$ tetiva kružnice polumjera $|PS|$, vrijedi $|AC| \leq 2|PS|$, odnosno $k \geq \frac{1}{2}$.

10 bodova

Jednakost se postiže ako i samo ako je $\overline{AC}$ promjer te kružnice, a tada je po Talesovom poučku $\sphericalangle ASC = 90°$, tj. $CS \perp AB$. Time je dokazano da je površina trokuta PQS minimalna kad je S nožište visine iz C. 5 bodova

3. Za svaki $n \geq 2$ vrijedi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(2n-1)}{n} a_{n-1} = \frac{2^2(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} a_{n-2} \\ &= \ldots = \frac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2} a_1. \end{aligned}$$

10 bodova

Pomnožimo brojnik i nazivnik s $(n-1)!$ — 5 bodova
te iskoristimo

$$2^{n-1}\cdot(n-1)! = (2n-2)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2.$$

Dobivamo

$$a_n = \frac{(2n-1)!}{n!\cdot(n-1)!} = \binom{2n-1}{n}$$

pa je tvrdnja dokazana jer su binomni koeficijenti prirodni brojevi. — 10 bodova

4. S $M(a,b)$ označavamo najveću zajedničku mjeru brojeva a i b.

a) Neka je $d = \mathrm{M}(b,c)$ i $b = db_0$, $c = dc_0$. Pritom je $\mathrm{M}(b_0,c_0) = 1$.
Dana jednakost postaje

$$c_0(adc_0+1)^2 = d(5c_0+2b_0)(2c_0+b_0).$$

Uočimo da je $\mathrm{M}(c_0, 2c_0+b_0) = 1$, jer su b_0 i c_0 relativno prosti, i $M(c_0, 5c_0+2b_0) = M(c_0, 2b_0) = 1$, jer je c_0 (kao i c) neparan broj. Stoga $c_0 \mid d$.

Nadalje je $\mathrm{M}(d, (adc_0+1)^2) = 1$, odakle slijedi $d \mid c_0$.

Stoga mora biti $c_0 = d$ pa je $c = dc_0 = d^2$, čime je tvrdnja dokazana. — 10 bodova

b) Pretpostavimo da je c paran, tj. $c = 2c_1$.
Iz početne jednakosti dobivamo

$$c_1(2ac_1+1)^2 = (5c_1+b)(4c_1+b).$$

Stavimo $d = \mathrm{M}(b,c_1)$ i $b = db_0$, $c_1 = dc_0$. Pritom je $\mathrm{M}(b_0,c_0) = 1$.

Jednakost prelazi u

$$c_0(2adc_0+1)^2 = d(5c_0+b_0)(4c_0+b_0).$$

Kako je $\mathrm{M}(c_0, 5c_0+b_0) = \mathrm{M}(c_0, 4c_0+b_0) = 1$ i $\mathrm{M}(d, (2adc_0+1)^2) = 1$, mora biti $d = c_0$ i

$$(2adc_0+1)^2 = (5c_0+b_0)(4c_0+b_0).$$

5 bodova

Napomena. Ukoliko učenik dođe do ovog rezultata, a nije riješio dio a), ovo se vrednuje s 10 bodova.

Zbog $\mathrm{M}(5c_0+b_0, 4c_0+b_0) = \mathrm{M}(c_0, 4c_0+b_0) = \mathrm{M}(c_0, b_0) = 1$
zaključujemo da mora biti $5c_0 + b_0 = m^2$ i $4c_0 + b_0 = n^2$,
za neke m, $n \in \mathbb{N}$. 3 boda

Pritom je $m > n$ i $m - n \geq 1$. Vrijedi $d = c_0 = m^2 - n^2$,
te $2ad^2 + 1 = 2adc_0 + 1 = mn$ pa imamo

$$\begin{aligned}
mn &= 1 + 2ad^2 \\
&= 1 + 2a(m^2 - n^2)^2 = 1 + 2a(m-n)^2(m+n)^2 \\
&\geq 1 + 2a(m+n)^2 \\
&\geq 1 + 8amn \geq 1 + 8mn.
\end{aligned}$$

No sada smo dobili kontradikciju $mn \geq 1 + 8mn$,
tj. $7mn \leq -1$. Dakle, c ne može biti paran. 7 bodova