MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
8. travnja 2005. godine

7. razred

1. Riješi jednadžbu
$$\frac{ax-5}{12}-\frac{a+x}{6}=a+x$$
po nepoznanici x. Za koju vrijednost parametra a jednadžba nema rješenja?

2. Četiri autoprijevoznika, Branko, Jurica, Petar i Vedran, dobili su zadatak da svojim vozilima u toku jednog tjedna prevezu iz skladišta na gradilište vreće cementa. Prvog dana stigao je Jurica i odvezao četvrtinu vreća koje je zatekao u skladištu. Drugog dana stiže Vedran i, misleći da je on prvi, uzima četvrtinu vreća sa smanjene hrpe. Trećeg dana dolazi Branko i odvozi četvrtinu ostatka. Posljednji, Petar, postupio je na isti način: odvezao je četvrtinu ostatka. Na kraju tjedna, začuđeni skladištar promatrao je hrpu sa 405 vreća cementa. Koliko je vreća cementa trebalo prebaciti na gradilište?

3. Broj stranica jednog mnogokuta je za 30% veći od broja stranica drugog mnogokuta. Zbroj svih unutarnjih kutova prvog mnogokuta je za 540° veći od zbroja svih unutarnjih kutova drugog mnogokuta. Koliko vrhova ima svaki od tih mnogokuta?

4. $ABCDEFGHIJ$ je pravilni deseterokut, a S je središte njemu opisane kružnice. Simetrala kuta $\angle SAB$ siječe dužine $\overline{SB}$ i $\overline{SC}$ u točkama M i N. Dokaži da je četverokut $BMNC$ jednakokračni trapez.

5. Neka su točke D i E nožišta visina iz vrhova A i B jednakokračnog trokuta ABC, te neka je točka O točka u kojoj se sijeku te dvije visine trokuta. Izračunaj površinu četverokuta $ODCE$ ako je $|AB|=|AC|=100$ mm, $|BC|=120$ mm i $|BE|=96$ mm.

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Župa 2005.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

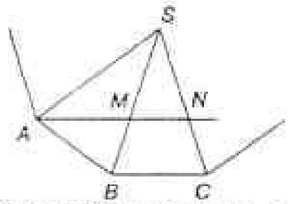
1. Pomnožimo li jednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom 12,
dobivamo $ax - 5 - 2a - 2x = 12a + 12x$. 2 BODA
Prebacivanjem nepoznanice x na lijevu stranu jednadžbe dobivamo
$ax - 14x = 14a + 5$, odnosno $x(a - 14) = 14a + 5$. 3 BODA
Sada je rješenje jednadžbe $x = \frac{14a+5}{a-14}$, za $a \neq 14$. 2 BODA
Konačno, ako je $a = 14$ jednadžba nema rješenja, jer bi tada bilo $x \cdot 0 = 201$, što nije moguće. 3 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x traženi broj vreća.
Jurica odvozi $\frac{1}{4}x$, a ostatak je $\frac{3}{4}x$. 2 BODA
Vedran odvozi $\frac{3}{16}x$, a ostatak je $\frac{9}{16}x$. 2 BODA
Branko odvozi $\frac{9}{64}x$, a ostatak je $\frac{27}{64}x$. 2 BODA
Petar odvozi $\frac{27}{256}x$, a ostatak je $\frac{81}{256}x$. 2 BODA
Budući da je taj ostatak 405 vreća, iz jednadžbe $\frac{81}{256}x = 405$ nalazimo da je $x = 1280$.
Na gradilište je trebalo prebaciti 1280 vreća. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

3.
Neka prvi mnogokut ima n stranica. Tada drugi mnogokut ima $n + 0.3n = 1.3n$ stranica. 2 BODA
Nadalje, kako je zbroj unutarnjih kutova drugog mnogokuta za $540°$ veći od zbroja kutova prvog mnogokuta, dobivamo jednadžbu $(1.3n - 2)180° = (n - 2)180° + 540°$. 3 BODA
Podijelimo li tu jednadžbu sa $180°$ imamo $1.3n - 2 = n - 2 + 3$, odnosno $0.3n = 3$, odakle je $n = 10$. 3 BODA
Konačno, prvi poligon ima 10 vrhova, a drugi $1.3 \cdot 10 = 13$ vrhova. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

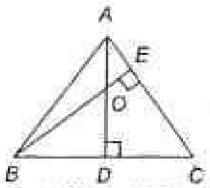
4. Središnji kut $\angle ASB = \frac{360°}{10} = 36°$, a budući da je trokut ASB jednakokračan slijedi da su kutovi uz osnovicu $\overline{AB}$ jednaki $72°$. I trokut SBC je karakteristični trokut, te je jednakokračan s kutovima $72°$ uz osnovicu. 3 BODA
Pravac AN je simetrala kuta $\angle SAB$, pa je $\angle MAB = 36°$. No tada je $\angle AMB = 180° - 36° - 72° = 72°$. 2 BODA

Skica 2 BODA



Uz to vrijedi, $\angle SMN = \angle AMB = 72°$ jer su to vršni kutovi. Dakle, kutovi $\angle SMN$ i $\angle SBC$ su jednaki, pa su im krakovi MN i BC paralelni. Time smo pokazali da je četverokut $BMNC$ trapez. A jednakokračnost slijedi iz činjenice da su mu kutovi uz osnovicu jednaki. 3 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

5. SKICA 2 BODA



Kutovi $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle EBC$ imaju okomite krakove pa su jednaki tj. $\sphericalangle CAD = \sphericalangle EBC$. 1 BOD
Isto tako je $\sphericalangle ADC = 90° = \sphericalangle CEB$, pa prema teoremu $K - K$ o sličnosti slijedi $\triangle ADC \sim \triangle BEC$. 1 BOD

Iz te sličnosti je $\frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|EC|}$, odnosno $\frac{|AD|}{96} = \frac{100}{120} = \frac{60}{|EC|}$,
pa je $|AD| = 80$ mm i $|EC| = 72$ mm. 2 BODA
Dalje je $|AE| = |AC| - |EC| = 100 - 72 = 28$ mm. 1 BOD
Očito je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle OAE$ i $\sphericalangle ADC = 90° = \sphericalangle AEO$, pa prema teoremu $K - K$ o sličnosti slijedi $\triangle ADC \sim \triangle AEO$. 1 BOD
Iz te sličnosti slijedi $\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{AC}{AO}$, odnosno $\frac{80}{28} = \frac{100}{AO}$, pa je $|AO| = 35$ mm. 1 BOD
Dalje je $|DO| = |AD| - |AO| = 80 - 35 = 45$ mm. Na kraju je $P(ODCE) = P(BCE) - P(BDO) = \frac{|BE| \cdot |EC|}{2} - \frac{|BD| \cdot |DO|}{2} = \frac{96 \cdot 72}{2} - \frac{60 \cdot 45}{2} = 2106$,
gdje P označava odgovarajuću površinu. Dakle, površina četverokuta $ODCE$ je 2106 mm^2. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA