MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
8. travnja 2005. godine

8. razred

1. Dokaži da je broj $8^{5004} - 6^{3008}$ djeljiv s 10.

2. Odredi sve dvoznamenkaste prirodne brojeve n takve da je broj

$$\sqrt{\frac{n+36}{n-36}}$$

isto prirodni broj.

3. Trapezu $ABCD$ upisana je kružnica središta S i polumjera 2 cm. Izračunaj opseg tog trapeza ako su kutovi uz jedan krak pravi, a duljina jedne osnovice je 3 cm.

4. Tetiva $\overline{AB}$ kružnice k duljine je 6 cm. Duljine lukova $\widehat{AB}$ i $\widehat{BA}$ koji zajedno čine kružnicu odnose se kao $2:1$. Tangente na kružnicu k u točkama A i B sijeku se u točki C. Izračunaj površinu trokuta ABC.

5. Odredi sve pravokutne trokute kojima su duljine stranica prirodni brojevi i pri tome je duljina jedne od njih jednaka 17.

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

ŽUP 2005.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVAT I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Broj 8^4 završava znamenkom 6, a svaka potencija takvog broja završava sa 6, pa i $8^{5004} = (8^4)^{1251}$ završava znamenkom 6. 4 BODA

Broj 6^{3008} završava sa 6. 3 BODA

Razlika ta dva broja ima znamenku jedinica jednaku 0, tj. djeljiva je s 10. 3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Korijen je prirodan broj samo ako je broj pod korijenom isto prirodan. Vrijedi $\frac{n+36}{n-36} = 1 + \frac{72}{n-36}$. Dakle, $n-36$ je djelitelj broja 72. Negativne djelitelje ne treba niti promatrati, jer će za njih promatrani broj biti negativan ili 0, pa korijen ili ne postoji ili je jednak 0, što nije prirodni broj. 2 BODA

Popunimo ovu tablicu:

$n-36$	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	36	72
n	37	38	39	40	42	44	45	48	54	60	72	108
$\frac{72}{n-36}$	72	36	24	18	12	9	8	6	4	3	2	1
$1+\frac{72}{n-36}$	73	37	25	19	13	10	9	7	5	4	3	2

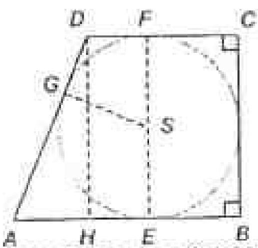
6 BODOVA

Od brojeva u posljednjem retku, samo su 25,9 i 4 potpuni kvadrati. Dakle, n je 39, 45 ili 60. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je $\angle ABC = \angle BCD = 90°$, $GS \perp AD$, $ES \perp AB$, $HD \perp AB$ i $|CD| = 3$ cm. Označimo $|AG| = x$.

Slika 2 BODA



Tada je $|BC| = |EF| = |HD| = 4$ cm. 2 BODA

Iz sukladnosti trokuta DSG i DFS slijedi $|FD| = |GD|$, a to je jednako $|HE| = 3 - 2 = 1$ cm. 2 BODA

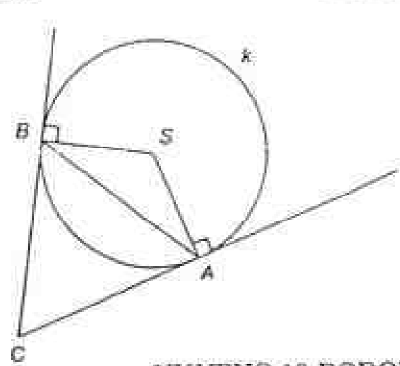
Trokut AHD je pravokutni, pa prema Pitagorinom poučku vrijedi $|AD|^2 = |AH|^2 + |HD|^2$, $(x+1)^2 = (x-1)^2 + 4^2$, tj. $x = 4$ cm. 3 BODA

Opseg trapeza je $6 + 4 + 3 + 5 = 18$ cm. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Središnji kutovi se odnose kao lukovi, pa se radi o kutovima od 120° i 240°. 3 BODA

Slika 2 BODA



Trokut ABS je jednakokračan, pa je $\angle BAS = \angle SBA = 30°$. 1 BOD

Budući da su tangente okomite na polumjere, onda je $\angle CAB = 90° - \angle BAS = 60°$ i $\angle ABC = 60°$. No tada je i $\angle BCA = 60°$, tj. trokut ABC je jednakostraničan stranice 6 cm. 2 BODA

$P(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm^2. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Razlikujemo dva slučaja: duljina hipotenuze je 17 ili duljina jedne katete je 17.

U prvom slučaju imamo jednadžbu $a^2 + b^2 = 289$. Sada treba naći dva kvadrata čija je suma 289. Svi kvadrati manji od 289 su: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,144,169,225,256. Jedina dva kvadrata koji zadovoljavaju uvjet su 225 i 64. Dakle, radi se o trokutu s duljinama stranica 8,15 i 17. 5 BODOVA

U drugom slučaju, ako označimo da je $a = 17$, imamo jednadžbu $289 + b^2 = c^2$, tj. $c^2 - b^2 = 289$. Rastavljanjem na faktore dobivamo $(c-b)(c+b) = 289 = 1 \cdot 289$. Odavde nalazimo $c = 145$ i $b = 144$. 5 BODOVA

.... UKUPNO 10 BODOVA