MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. – 29. travnja 2006.

Zadaci za **I. razred** srednje škole

A varijanta

1. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{xyz}$ (x, y, z su dekadske znamenke) koji su jednaki izrazu $x + y + z + xy + yz + zx + xyz$.

2. Neka su a, b, c realni brojevi koji nisu svi jednaki, takvi da vrijedi
$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$
Dokaži da je $a + \dfrac{1}{b} = -abc$.

3. Iz jednog vrha šiljastokutnog trokuta povučena je visina, iz drugog težišnica, a iz trećeg simetrala kuta. Ta tri pravca ne prolaze istom točkom, već njihove točke presjeka čine vrhove novog trokuta. Dokaži da novi trokut ne može biti jednakostraničan.

4. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Svaki zadatak se boduje s 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. - 29. travnja 2006.

Zadaci za **II. razred** srednje škole

A varijanta

1. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi

$$m^3 + n^3 = (m+n)^2.$$

2. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geq 0.$$

3. Kružnice $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice $\mathcal{C}_2$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki C, a tangenta kružnice $\mathcal{C}_1$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$, siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki M, kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.

4. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Svaki zadatak se boduje s 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. - 29. travnja 2006.

Zadaci za **III. razred** srednje škole

A varijanta

1. Duljine stranica trokuta su a, b i $c = \dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $a > b$. Dokaži da za kutove α i β, nasuprotne stranicama a i b, vrijedi $\alpha - \beta = 90°$.

2. U jednakokračnom trokutu ABC s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, D je polovište osnovice $\overline{BC}$. Neka je točka E nožište okomice iz D na stranicu $\overline{AB}$, te F polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da je AF okomito na EC.

3. Kružnice $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice $\mathcal{C}_2$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki C, a tangenta kružnice $\mathcal{C}_1$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$, siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki M, kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.

4. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow D$, $D \leftrightarrow A$).

Svaki zadatak se boduje s 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. – 29. travnja 2006.

Zadaci za **IV. razred** srednje škole

A varijanta

1. Dokaži da sjecište pravaca koji sadrže visine trokuta, kojeg tvore tri tangente parabole, leži na ravnalici te parabole.

2. Ako su k i n prirodni brojevi, dokaži da je izraz
$$(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k+(n+1)n^{4k-1},$$
djeljiv s n^5+1.

3. Kružnice C_1 i C_2 sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice C_2 povučena iz točke A siječe kružnicu C_1 u točki C, a tangenta kružnice C_1 povučena iz točke A siječe kružnicu C_2 u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$, siječe kružnicu C_1 u točki M, kružnicu C_2 u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.

4. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow D$, $D \leftrightarrow A$).

Svaki zadatak se boduje s 25 bodova.

Državno natjecanje 2006., I. razred, A varijanta – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{xyz}$ (x, y, z su dekadske znamenke) koji su jednaki izrazu $x + y + z + xy + yz + zx + xyz$.

   Rješenje. Treba odrediti znamenke x, y, z tako da vrijedi

$$\begin{aligned}\overline{xyz} &= x+y+z+xy+yz+zx+xyz,\\ 100x+10y+z &= x+y+z+xy+yz+zx+xyz,\\ 99x+9y-xy &= yz+zx+xyz.\end{aligned}$$

   Zato je

$$z = \frac{99x+9y-xy}{x+y+xy}.$$

   Kako je z znamenka, mora biti $z \leq 9$, odnosno

$$99x+9y-xy \leq 9x+9y+9xy,$$

   odakle slijedi $90x \leq 10xy$, tj. $y \geq 9$. Naravno, i y je znamenka pa je nužno $y = 9$.
   Uvrštavanjem dobivamo $z = \dfrac{99x+9\cdot 9-9x}{x+9+9x} = \dfrac{90x+81}{10x+9} = 9.$
   Polazna jednakost je zadovoljena za $y = z = 9$ i bilo koji x:

$$x+y+z+xy+yz+zx+xyz = x+9+9+9x+81+9x+81x = 100x+99 = \overline{x99}.$$

   Traženi brojevi su: 199, 299, 399, 499, 599, 699, 799, 899 i 999.

2. Neka su a, b, c realni brojevi koji nisu svi jednaki, takvi da vrijedi

$$a+\frac{1}{b} = b+\frac{1}{c} = c+\frac{1}{a}.$$

   Dokaži da je $a+\dfrac{1}{b} = -abc$.

   Rješenje. Neka je $p = a+\dfrac{1}{b} = b+\dfrac{1}{c} = c+\dfrac{1}{a}$. Treba dokazati da je $p = -abc$.
   Množenjem ovih jednakosti s b, c, a redom, dobivamo

$$ab+1 = pb, \quad bc+1 = pc, \quad ca+1 = pa,$$

   a njihovim oduzimanjem jednakosti:

$$b(a-c) = p(b-c), \quad c(b-a) = p(c-a), \quad a(c-b) = p(a-b).$$

   Množenjem ovih triju jednakosti dobivamo

$$abc(a-c)(b-a)(c-b) = p^3(b-c)(c-a)(a-b). \qquad (*)$$

Iz danih jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} a-b &= \frac{1}{c}-\frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}, \\ b-c &= \frac{1}{a}-\frac{1}{c} = \frac{c-a}{ca}, \\ c-a &= \frac{1}{b}-\frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}, \end{aligned}$$

te množenjem

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(abc)^2}. \qquad (**)$$

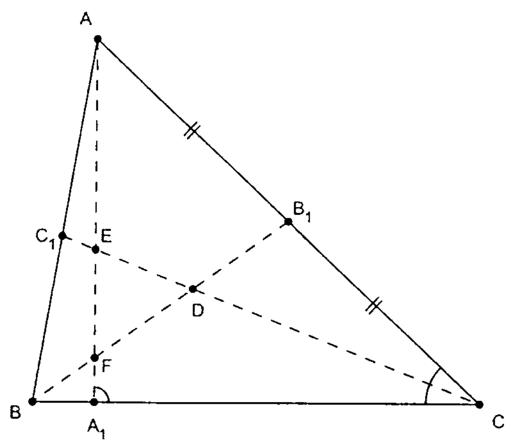
Ako bi dva od brojeva a, b, c bili jednaki, bili bi jednaki sva tri. Zaključujemo da su dani brojevi međusobno različiti, tj. da je $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$.

Sada iz (**) dobivamo $abc = \pm 1$.

Iz $(*)$ je $p^3 = -abc$, tj. $p^3 = \mp 1$, pa zaključujemo $p = \mp 1$, te konačno $p = -abc$.

3. Iz jednog vrha šiljastokutnog trokuta povučena je visina, iz drugog težišnica, a iz trećeg simetrala kuta. Ta tri pravca ne prolaze istom točkom, već njihove točke presjeka čine vrhove novog trokuta. Dokaži da novi trokut ne može biti jednakostraničan.

Rješenje. Neka je $\overline{AA_1}$ visina, $\overline{BB_1}$ težišnica i $\overline{CC_1}$ simetrala kuta, te neka su D, E i F kao na slici.



Pretpostavimo, suprotno tvrdnji zadatka, da je trokut DEF jednakostraničan, tj. da su mu svi kutovi $60°$.

Tada je u trokutu BA_1F: $\sphericalangle A_1FB = 60°$ i $\sphericalangle BA_1F = 90°$, pa je $\sphericalangle A_1BF = 30°$.

U trokutu A_1CE također znamo dva kuta, $\sphericalangle A_1EC = 60°$ i $\sphericalangle EA_1C = 90°$, pa je $\sphericalangle A_1CE = 30°$. Kako je CC_1 simetrala kuta $\sphericalangle ACB$, slijedi $\sphericalangle B_1CD = \sphericalangle DCA_1 = 30°$ i $\sphericalangle BCA = 60°$.

Zato sada iz trokuta BCB_1 zaključujemo $\sphericalangle BB_1C = 90°$, pa je težišnica $\overline{BB_1}$ ujedno i visina trokuta ABC. To znači da je trokut jednakokračan, $|AB| = |BC|$. No, jednakokračni trokut s jednim kutom od $60°$ je jednakostraničan. Ali, ako je $\triangle ABC$ jednakostraničan, onda se AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki. Kontradikcija.

4. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Rješenje. Dovoljno je prebrojiti moguće "rasporede" prostih faktora u tablici. Rastav broja 270 na proste faktore je $270 = 2 \cdot 5 \cdot 3^3$.

Jasno je da će u svakom retku i svakom stupcu točno jedan broj biti djeljiv s 2, i točno jedan djeljiv s 5.

Faktore 2 i 5 u prvom retku možemo upisati na bilo koje od tri mjesta, a zatim u drugom retku na jedno od dva "preostala" mjesta. Nakon toga je položaj tog faktora u trećem retku jednoznačno određen. Zato faktore 2 i 5 možemo upisati na po 6 načina.

Što se tiče djeljivosti s 3, ima malo više mogućnosti. Od tri broja u istom retku (ili stupcu), moguće je:

a) da je svaki djeljiv s 3 (ali ne s 9);

b) da je jedan djeljiv s 9 (ne s 27), jedan s 3 (ne s 9), a treći nije djeljiv s 3;

c) da je jedan djeljiv s 27 (ali ne s 81), a ostali nisu djeljivi s 3.

Mogući rasporedi faktora 3 po tablici su:

3	3	3
3	3	3
3	3	3

3	3	3
9	3	1
1	3	9

9	3	1
3	1	9
1	9	3

27	1	1
1	1	27
1	27	1

1	9	3
27	1	1
1	3	9

1. tri retka tipa a)
2. jedan redak tipa a) i dva retka tipa b)
3. tri retka tipa b)
4. tri retka tipa c)
5. jedan redak tipa c) i dva retka tipa b)

Drugih mogućnosti nema.

Prebrojimo moguće rasporede:

1. Samo je jedan ovakav raspored.
2. Biramo u koji od tri retka upisati $(3,3,3)$, zatim upišemo u jedan retak neku od 6 permutacija od $(9,3,1)$, a treći redak je jednoznačno određen. To možemo napraviti na $3 \cdot 6 = 18$ načina.
3. Prvi red možemo popuniti na 6 načina, drugi na dva načina, a treći na samo jedan način. Ukupno: 12 načina.
4. Ukupno $3 \cdot 2 = 6$ načina.
5. Slično kao pod 2., ukupno 18 načina.

Ukupan broj mogućnosti rasporeda faktora 3 je $1 + 18 + 12 + 6 + 18 = 55$.

Konačno, traženi ukupni broj mogućnosti je $6 \cdot 6 \cdot 55 = 1980$.

Državno natjecanje 2006., II. razred, A varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Odredi sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi

$$m^3 + n^3 = (m+n)^2.$$

Rješenje.
Jednadžba se može zapisati u obliku

$$(m+n)(m^2 - mn + n^2) = (m+n)^2.$$

Odavde slijedi da su svi parovi $(m, n) = (a, -a)$, $a \in \mathbb{Z}$ rješenja dane jednadžbe. Za $m \neq -n$, nakon dijeljenja s $m+n$ dobivamo kvadratnu jednadžbu po m :

$$m^2 - (n+1)m + n^2 - n = 0.$$

Njezina diskriminanta je $D = (n+1)^2 - 4(n^2 - n) = -3n^2 + 6n + 1$. Da bi rješenja bila realna mora biti $D \geq 0$, tj. $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \leq n \leq \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$, odakle slijedi $n \in \{0, 1, 2\}$.

Moramo još promatrati sljedeća tri slučaja:

1° $n = 0$: $m^2 - m = 0$, tj. $m = 0$ ili $m = 1$;

2° $n = 1$: $m^2 - 2m = 0$, tj. $m = 0$ ili $m = 2$;

3° $n = 2$: $m^2 - 3m + 2 = 0$, tj. $m = 1$ ili $m = 2$.

Skup cjelobrojnih rješenja dane jednadžbe je

$$\{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2)\}.$$

2. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geq 0.$$

Rješenje.
Množenjem nejednakosti s $(x+1)(y+1)(z+1)$ dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$(x^2 - 1)(z+1) + (y^2 - 1)(x+1) + (z^2 - 1)(y+1) \geq 0,$$

ili, nakon sređivanja,

$$(x^2 z + y^2 x + z^2 y) + (x^2 + y^2 + z^2) \geq x + y + z + 3.$$

Primjenom A-G nejednakosti dobivamo

$$x^2z + y^2x + z^2y \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3z^3} = 3.$$

Iz

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx \\ &\leq x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2+x^2 \\ &= 3(x^2+y^2+z^2)\end{aligned}$$

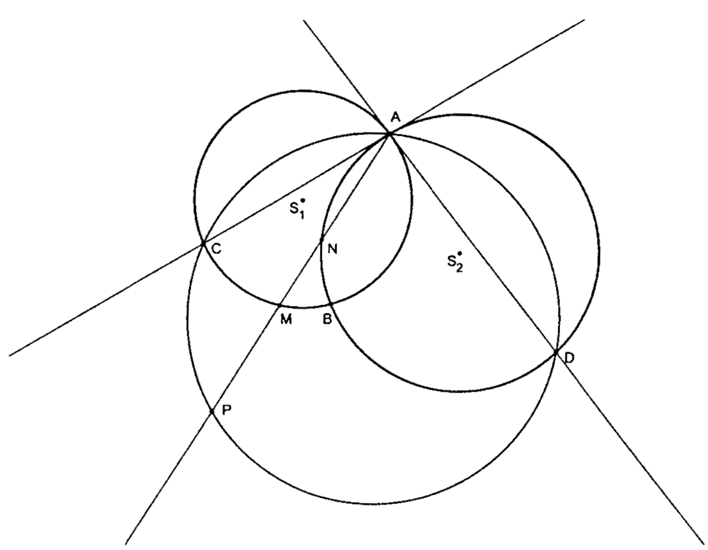
dobivamo

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2 &\geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \\ &= (x+y+z)\frac{x+y+z}{3} \\ &\geq (x+y+z)\sqrt[3]{xyz} \;=\; x+y+z.\end{aligned}$$

Time je dokazana i polazna nejednakost.

3. Kružnice $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice $\mathcal{C}_2$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki C, a tangenta kružnice $\mathcal{C}_1$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$, siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki M, kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.

Rješenje.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da polupravac kroz točku A leži unutar kuta $\sphericalangle BAC$.



Tada je
$$\sphericalangle CMP = \sphericalangle MCA + \sphericalangle CAM = \sphericalangle MAD + \sphericalangle CAM = \sphericalangle CAD.$$
Također je $\sphericalangle CPM = \sphericalangle CDA$ jer su to kutevi nad tetivom AC kružnice opisane trokutu ACD. Zato je trokut ACD sličan trokutu MCP i
$$\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{|MP|}{|AD|}.$$
Nadalje je $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MAD = \sphericalangle NAD$ i $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CAN = \sphericalangle ADN$ pa je trokut ACM sličan trokutu DAN i
$$\frac{|AN|}{|AD|} = \frac{|MC|}{|AC|}.$$
Slijedi $|MP| = |AN|$, odnosno $|AM| = |NP|$ što je i trebalo dokazati.

4. U polja kvadrata 3×3 treba upisati prirodne brojeve, tako da u svakom retku i svakom stupcu produkt upisanih brojeva bude 270. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Rješenje. Dovoljno je prebrojiti moguće "rasporede" prostih faktora u tablici. Rastav broja 270 na proste faktore je $270 = 2 \cdot 5 \cdot 3^3$.

Jasno je da će u svakom retku i svakom stupcu točno jedan broj biti djeljiv s 2, i točno jedan djeljiv s 5.

Faktore 2 i 5 u prvom retku možemo upisati na bilo koje od tri mjesta, a zatim u drugom retku na jedno od dva "preostala" mjesta. Nakon toga je položaj tog faktora u trećem retku jednoznačno određen. Zato faktore 2 i 5 možemo upisati na po 6 načina.

Što se tiče djeljivosti sa 3, ima malo više mogućnosti. Od tri broja u istom retku (ili stupcu), moguće je:

a) da je svaki djeljiv s 3 (ali ne s 9);

b) da je jedan djeljiv s 9 (ne s 27), jedan s 3 (ne s 9), a treći nije djeljiv s 3;

c) da je jedan djeljiv s 27 (ali ne s 81), a ostali nisu djeljivi s 3.

Mogući rasporedi faktora 3 po tablici su:

<table><tr><td>
<table><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>
</td><td>
<table><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>9</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>9</td></tr></table>
</td><td>
<table><tr><td>9</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>9</td></tr><tr><td>1</td><td>9</td><td>3</td></tr></table>
</td><td>
<table><tr><td>27</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>27</td></tr><tr><td>1</td><td>27</td><td>1</td></tr></table>
</td><td>
<table><tr><td>1</td><td>9</td><td>3</td></tr><tr><td>27</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>9</td></tr></table>
</td></tr></table>

1. tri retka tipa a)
2. jedan redak tipa a) i dva retka tipa b)
3. tri retka tipa b)
4. tri retka tipa c)
5. jedan redak tipa c) i dva retka tipa b)

Drugih mogućnosti nema.

Prebrojimo moguće rasporede:

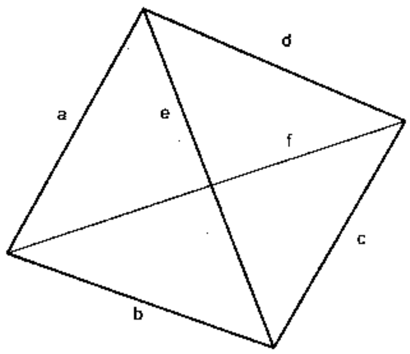
1. Samo je jedan ovakav raspored.

2. Biramo u koji od tri retka upisati $(3,3,3)$, zatim upišemo u jedan retak neku od 6 permutacija od $(9,3,1)$, a treći redak je jednoznačno određen. To možemo napraviti na $3 \cdot 6 = 18$ načina.
3. Prvi red možemo popuniti na 6 načina, drugi na dva načina, a treći na samo jedan način. Ukupno: 12 načina.
4. Ukupno $3 \cdot 2 = 6$ načina.
5. Slično kao pod 2., ukupno 18 načina.

Ukupan broj mogućnosti rasporeda faktora 3 je $1 + 18 + 12 + 6 + 18 = 55$.

Konačno, traženi ukupni broj mogućnosti je $6 \cdot 6 \cdot 55 = 1980$.

slijedi $S = \frac{21}{2}$, no to nije moguće jer je $S \in \mathbb{N}$.



Stoga se bridovi ne mogu označiti na traženi način.

Državno natjecanje 2006., III. razred, A kategorija – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Duljine stranica trokuta su a, b i $c = \dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a > b$. Dokaži da za kutove α i β, nasuprotne stranicama a i b, vrijedi $\alpha - \beta = 90°$.

Prvo rješenje.

Prema poučku o sinusima vrijedi.

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c} &= \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \\ &= \frac{2\sin\frac{180°-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.\end{aligned}$$

Ako je $\alpha - \beta = 90°$, tada je $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zato je dovoljno dokazati

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{c}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1-\cos\gamma}{2} = \frac{c^2}{2(a+b)^2}$$

odnosno

$$\cos\gamma = 1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)^2}.$$

Uvrstimo li zadanu vrijednost za c, imamo

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \frac{(a+b)^2 - \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2(a^2+b^2)-(a+b)^2(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)^2} \\ &= \frac{(a+b)^2\left[(a^2+b^2)-(a-b)^2\right]}{(a^2+b^2)(a+b)^2} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Sada je dovoljno dokazati da za zadani trokut vrijedi posljednja jednakost. Prema poučku o kosinusima, za zadane stranice vrijedi

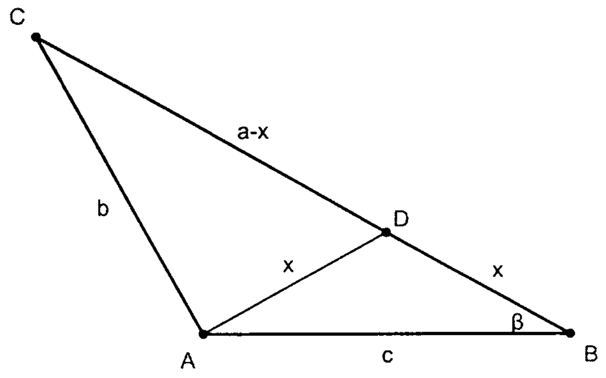
$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}}{2ab} \\ &= \frac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{2ab(a^2+b^2)} = \frac{4a^2b^2}{2ab(a^2+b^2)} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Označimo na stranici $\overline{BC}$ točku D takvu da je $|AD| = |BD|$. Sada treba dokazati da je trokut ADC pravokutan, odnosno

$$b^2 + x^2 = (a-x)^2$$

gdje je $x = |AD| = \dfrac{c}{2\cos\beta}$.



Tvrdnja je ekvivalentna s

$$\begin{aligned} b^2 &= (a-2x)\,a = \left(a - \frac{c}{\cos\beta}\right)a = \left(a - c\frac{2ac}{a^2+c^2-b^2}\right)a \\ &= a^2\left(1 - \frac{2c^2}{a^2+c^2-b^2}\right), \end{aligned}$$

odnosno s

$$1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{2c^2}{a^2+c^2-b^2}.$$

Invertiranjem dobijemo

$$\frac{a^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2-b^2}{2c^2} + \frac{1}{2}$$

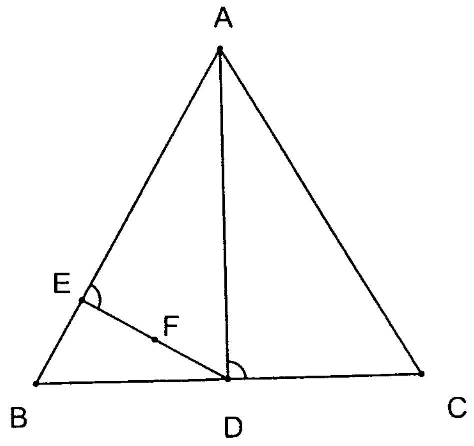
i odavde

$$c^2 = \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2+b^2}$$

što je ispunjeno uvjetom zadatka. Dakle, $\sphericalangle DAC = \alpha - \beta = 90^\circ$.

2. U jednakokračnom trokutu ABC s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, D je polovište osnovice $\overline{BC}$. Neka je točka E nožište okomice iz D na stranicu $\overline{AB}$, te F polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da je AF okomito na CE.

Prvo rješenje.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\\ \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EB}-2\overrightarrow{ED}.\end{aligned}$$

Kako je $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{ED}$ i $\overrightarrow{EB}\perp\overrightarrow{ED}$ slijedi

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EB}-2\overrightarrow{ED}\right)=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{ED}.$$

Računamo

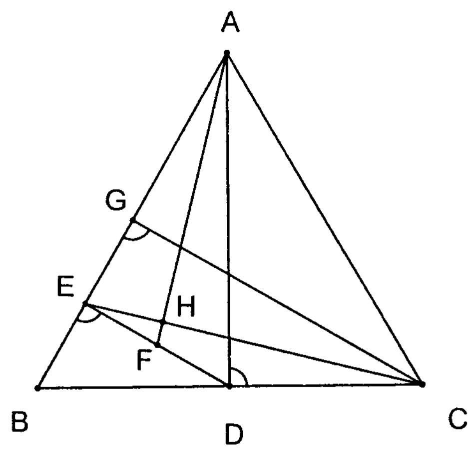
$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{ED}\right)\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}-0=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{ED}+0$$

pa je

$$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{ED}\right)\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{ED}=0$$

i tvrdnja je dokazana.

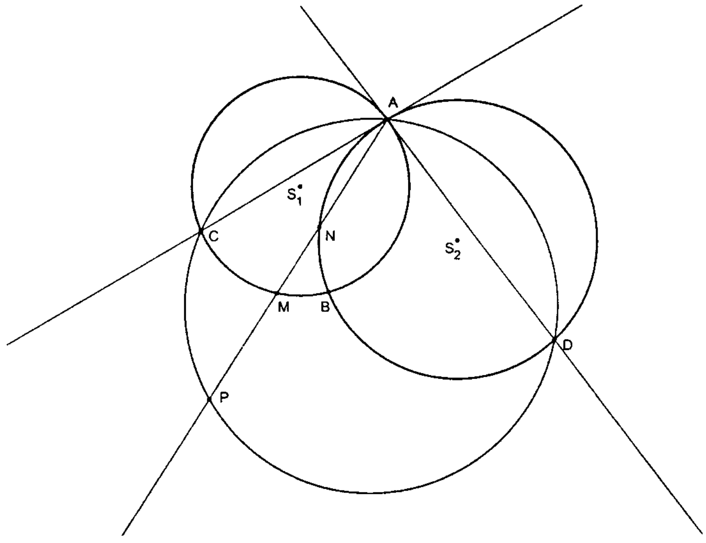
Drugo rješenje.



Neka je H točka presjeka AF i CE. Spustimo okomicu iz C na AB i nožište označimo sa G. Tada je trokut EDA sličan trokutu GBC, jer je $\sphericalangle AED=\sphericalangle BGC=90°$ i $\sphericalangle EDA=90°-\sphericalangle EDB=\sphericalangle GBC$. Kako je $DE\parallel CG$ i D polovište od $\overline{BC}$, E je polovište od $\overline{BG}$. Stoga je $\overline{CE}$ težišnica trokuta GBC. Također je $\overline{AF}$ težišnica trokuta EDA pa zbog sličnosti tih trokuta slijedi $\sphericalangle FAD=\sphericalangle ECB$. Dakle, četverokut $HDCA$ je tetivni i $\sphericalangle AHC=\sphericalangle ADC=90°$.

3. Kružnice $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ sijeku se u točkama A i B. Tangenta kružnice $\mathcal{C}_2$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki C, a tangenta kružnice $\mathcal{C}_1$ povučena iz točke A siječe kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki D. Polupravac kroz točku A, koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$, siječe kružnicu $\mathcal{C}_1$ u točki M, kružnicu $\mathcal{C}_2$ u točki N i kružnicu opisanu trokutu ACD u točki P. Dokaži da je udaljenost točaka A i M jednaka udaljenosti točaka N i P.

Rješenje.
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti polupravac kroz točku A leži unutar kuta $\sphericalangle BAC$.



Tada je

$$\sphericalangle CMP = \sphericalangle MCA + \sphericalangle CAM = \sphericalangle MAD + \sphericalangle CAM = \sphericalangle CAD.$$

Također je $\sphericalangle CPM = \sphericalangle CDA$ jer su to kutevi nad tetivom AC kružnice opisane trokutu $\triangle ACD$. Zato je trokut ACD sličan trokutu MCP i

$$\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{|MP|}{|AD|}.$$

Nadalje je $\sphericalangle ACM = \sphericalangle MAD = \sphericalangle NAD$ i $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CAN = \sphericalangle ADN$ pa je trokut ACM sličan trokutu DAN i

$$\frac{|AN|}{|AD|} = \frac{|MC|}{|AC|}.$$

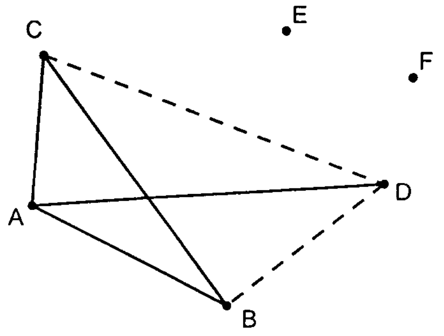
Slijedi $|MP| = |AN|$, odnosno $|AM| = |NP|$ što je i trebalo dokazati.

4. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog od ova dva poduzeća. Dokaži da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća (tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow D$, $D \leftrightarrow A$).

   Rješenje.
   Broj linija između 6 otoka je $\binom{6}{2} = 15$. Prema Dirichletovom načelu postoji poduzeće, nazovimo ga X, koje plovi na barem 8 linija. Promotrimo četveročlane podskupove otoka i za svaki takav podskup promotrimo sve linije između ta 4 otoka kojih ima $\binom{4}{2} = 6$. U barem jednom od tih podskupova na 4 linije plovi X, s obzirom da to poduzeće plovi na više linija od drugog poduzeća. Naime, u protivnom bi za svaki četveročlani podskup na po 3 linije plovilo i jedno i drugo poduzeće, što nije moguće.

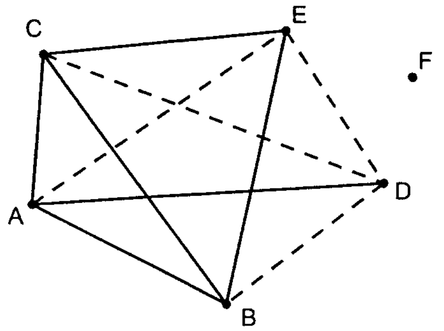
   Ako te 4 linije čine ciklus, tvrdnja je dokazana.

   Pretpostavimo sada da X plovi između otoka A, B, C i D na točno 4 linije koje ne čine ciklus (ako bi plovio na 5 linija među tim otocima, tada bi imali ciklus od 4 povezana otoka). Pretpostavimo da X plovi na linijama $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow A$, $A \leftrightarrow D$.

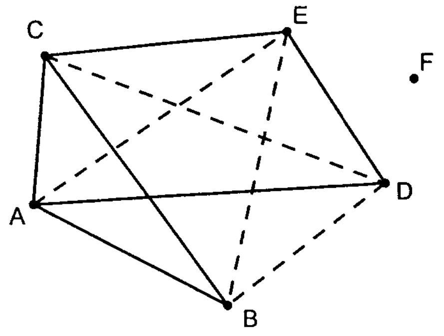


Zato su preostala dva otoka E i F ukupno povezana s barem 4 linije (s ostalim otocima i eventualno međusobno). Zato je barem jedan od njih, recimo E, povezan s otocima A, B, C i D s barem dvije linije.

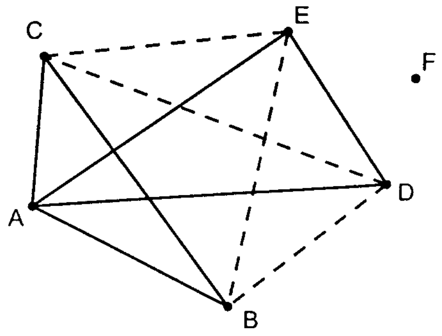
Ako su obje s odredištima iz skupa $\{A, B, C\}$, tada opet imamo ciklus od 4 povezana otoka A, B, C i E.



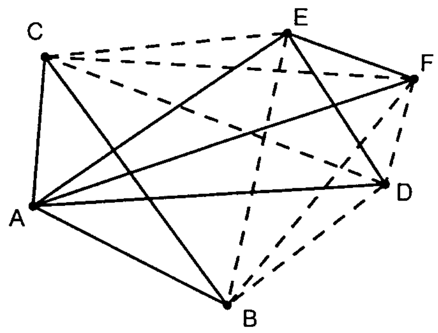
Ako je jedna od linija $E \leftrightarrow D$, a druga $E \leftrightarrow B$ ili $E \leftrightarrow C$, opet imamo ciklus od 4 povezana otoka.

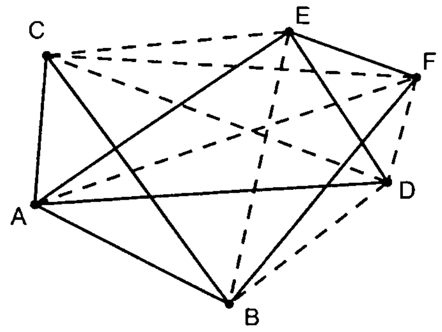


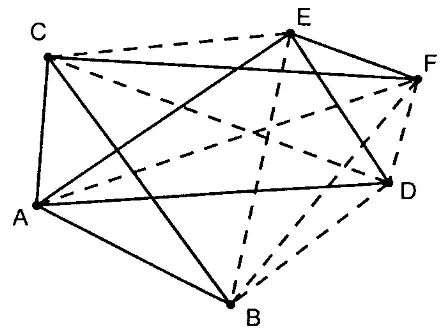
Pretpostavimo da poduzeće X plovi na linijama $E \leftrightarrow D$ i $E \leftrightarrow A$, a ne plovi na linijama $E \leftrightarrow B$ i $E \leftrightarrow C$.

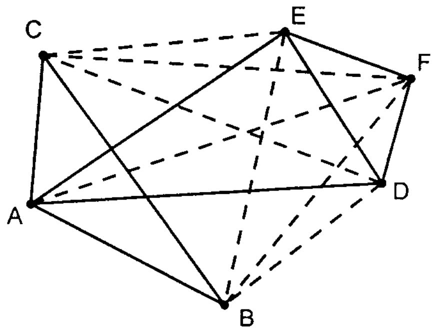


Ako još k tome plovi i na liniji $E \leftrightarrow F$, tada X iz F plovi prema jednom od otoka A, B, C i D (ukupno je 8 linija poduzeća X), te u svakom od tih slučajeva imamo ciklus od 4 povezana otoka.

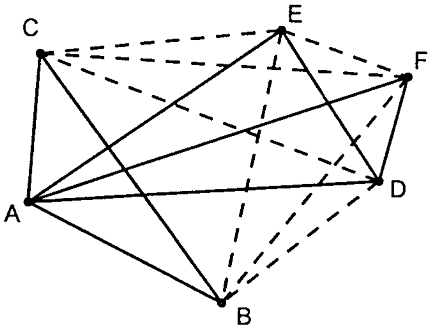








Zato pretpostavimo da iz E poduzeće X plovi samo na linijama $E \leftrightarrow D$ i $E \leftrightarrow A$. U tom slučaju iz F poduzeća X plovi na dvije linije prema otocima A, B, C i D. Istim zaključivanjem kao ranije zaključujemo da imamo ciklus od 4 povezana otoka, osim možda u slučaju kada su te dvije linije $F \leftrightarrow D$ i $F \leftrightarrow A$. No, tada su ciklusom povezani otoci A, D, E i F.



Državno natjecanje 2006., IV. razred, A varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Dokaži da sjecište visina trokuta kojeg tvore tri tangente parabole leži na ravnalici te parabole.

Rješenje.
Parabola ima jednadžbu $y^2 = 2px$. U točki $T_1(x_1, y_1)$ ona ima tangentu

$$t_1 \quad \ldots \quad y_1 y = px + px_1.$$

Analogno su jednadžbe tangenata

$$t_2 \quad \ldots \quad y_2 y = px + px_2, \qquad t_3 \quad \ldots \quad y_3 y = px + px_3,$$

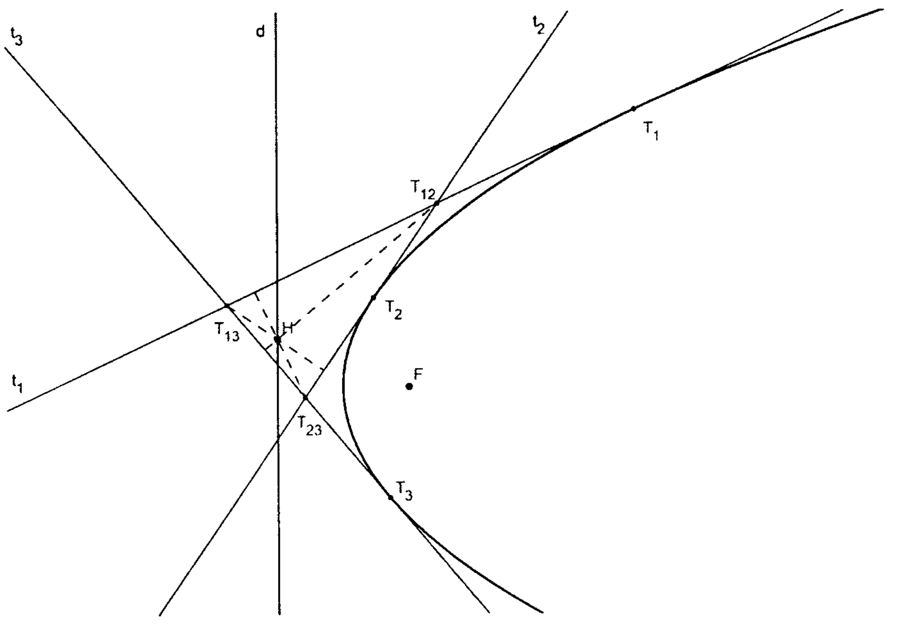
za koje se lako vidi da imaju sjecište

$$T_{23} = \left(\frac{1}{2p}y_2y_3, \frac{1}{2}(y_2 + y_3)\right)$$

jer je npr.

$$y_2 \cdot \frac{1}{2}(y_2 + y_3) = p \cdot \frac{1}{2p}y_2y_3 + \frac{1}{2}y_2^2,$$

pa je $T_{23} \in t_2$ i slično je $T_{23} \in t_3$.



Pravac t_1 ima koeficijent smjera $\frac{p}{y_1}$, pa visina u vrhu T_{23} ima jednadžbu

$$y - \frac{1}{2}(y_2 + y_3) = -\frac{y_1}{p}(x - \frac{y_2y_3}{2p}).$$

Ravnalica ima jednadžbu $x = -\frac{p}{2}$. Iz ove dvije jednadžbe za ordinatu sjecišta visina trokuta $T_{12}T_{13}T_{23}$, s ravnalicom, dobivamo

$$y = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) - \frac{y_1}{p}\left(-\frac{p}{2} - \frac{y_2 y_3}{2p}\right) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) + \frac{y_1 y_2 y_3}{2p^2}.$$

Dobiveni izraz je simetričan po y_1, y_2, y_3, pa slijedi tvrdnja zadatka.

2. Ako su k i n prirodni brojevi, dokaži da je izraz

$$(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n+1)n^{4k-1},$$

djeljiv s $n^5 + 1$.

Prvo rješenje.
Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po k.

1° Baza indukcije. Za $k = 1$ je:

$$\begin{aligned}
&(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) + (n+1)n^3 = \\
&= (n-1)(n+1)(n^2+1)(n-1)(n^2+1) + (n+1)n^3 \\
&= (n+1)[(n^2 - 2n + 1)(n^4 + 2n^2 + 1) + n^3] \\
&= (n+1)[n^6 - 2n^5 + 3n^4 - 3n^3 + 3n^2 - 2n + 1] \\
&= (n+1)[(n^6 + n) - 2(n^5 + 1) + 3(n^4 - n^3 + n^2 - n + 1)] \\
&= n(n+1)(n^5+1) - 2(n+1)(n^5+1) + 3(n^5+1),
\end{aligned}$$

odakle slijedi da je $(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) + (n+1)n^3$ djeljivo s $(n^5 + 1)$.

2° Korak indukcije. Pretpostavimo da je za neki $k \in \mathbb{N}$ dani izraz djeljiv s $n^5 + 1$, tj. da je

$$(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n+1)n^{4k-1} = (n^5 + 1)A,$$

gdje je A cijeli broj. Pokažimo da je i

$$(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^{k+1} + (n+1)n^{4k+3}$$

djeljivo s $(n^5 + 1)$. Imamo

$$\begin{aligned}
&(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^{k+1} = \\
&= (n^3 - n^2 + n - 1)\Big((n^5 + 1)A - (n+1)\cdot n^{4k-1}\Big) \\
&= (n^5 + 1)(n^3 - n^2 + n - 1)A - (n+1)(n^3 - n^2 + n - 1)\cdot n^{4k-1},
\end{aligned}$$

odnosno

*

$$
\begin{aligned}
& (n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^{k+1}+(n+1)\cdot n^{4k+3} = \\
= \; & (n^5+1)(n^3-n^2+n-1)A- \\
& -(n+1)(n^3-n^2+n-1)\cdot n^{4k-1}+(n+1)\cdot n^{4k+3} \\
= \; & (n^5+1)(n^3-n^2+n-1)A+(n+1)\cdot n^{4k-1}\Big(n^4-(n^3-n^2+n-1)\Big) \\
= \; & (n^5+1)\Big((n^3-n^2+n-1)A+n^{4k-1}\Big),
\end{aligned}
$$

odakle slijedi da je dani izraz djeljiv s n^5+1 za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Drugo rješenje.
Dani izraz je polinom u n, označimo ga s $f_k(n)$, s cjelobrojnim koeficijentima. Kako jednažba $x^5+1=0$ ima različita kompleksna rješenja, dovoljno je pokazati da ako je $x^5+1=0$, onda vrijedi $f_k(x)=0$. Za $x=-1$, $f_k(-1)=0$. Ako je $x^5+1=0$, a $x \neq -1$, onda je

$$x^4-x^3+x^2-x+1=0.$$

Tada je $x^4=x^3-x^2+x-1$ i napokon,

$$f_k(x)=(x^4-1)(x^4)^k+(x+1)x^{4k-1}=x^{4k-1}(x^5+1)=0.$$

Zadatak 3. i 4. isti su kao 3. i 4. u treæem razredu.