MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. - 29. travnja 2006.

Zadaci za **I. razred** srednje škole

B varijanta

1. Neka je $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ i $y = \dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$.
   Dokaži da je $(x+1)(y+1) = 2$.

2. Za koje realne brojeve a jednadžba
$$|x-2| + |3-x| = a$$
   ima točno dva rješenja ?

3. U pravokutnom trokutu ABC $(\gamma = 90°)$, središte upisane kružnice udaljeno je od vrhova A, B, C redom za $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{2}$ cm. Odredi polumjer tom trokutu opisane kružnice.

4. Dokaži da ne postoje neparni cijeli brojevi x, y, z za koje vrijedi
$$(x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2.$$

5. Razred od 28 učenika dobio je za domaću zadaću 8 zadataka. Svaki učenik riješio je točno dva zadatka, a nikoja dva učenika nisu riješila ista dva zadatka. Pokaži da je svaki zadatak riješilo jednako mnogo učenika. Koliko?

Svaki zadatak se boduje s 20 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. - 29. travnja 2006.

Zadaci za **II. razred** srednje škole

B varijanta

1. Ako je $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, izračunajte zbroj
$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{2006}.$$

2. Odredi koliko rješenja ima sustav jednadžbi
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0, \\ (x-a)^2 + y^2 &= 1, \end{aligned}$$
ovisno o vrijednosti realnog parametra a.

3. Na dužini $\overline{AB}$ odabrana je točka M i zatim su s iste strane dužine $\overline{AB}$ konstruirani jednakostranični trokuti AMD i MBC. Dokaži da četverokut $ABCD$ ima najmanju površinu ako je M polovište dužine $\overline{AB}$.

4. Neka su E i F točke na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ takve da je $|AE| = |EF|$. Okomica na AB u točki E siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki G, a dužine $\overline{DF}$ i $\overline{BG}$ sijeku se u točki H. Dokaži da su površine trokuta FBH i GHD jednake.

5. Mogu li se bridovi tetraedra označiti brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (svaki broj za točno jedan brid) tako da zbrojevi brojeva bridova na svakoj njegovoj strani budu međusobno jednaki?

Svaki zadatak se boduje s 20 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. - 29. travnja 2006.

Zadaci za **III. razred** srednje škole

B varijanta

1. Ako vrijede jednakosti

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \quad \text{i} \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1,$$

dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=1.$$

2. Dokaži da nejednakost

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

vrijedi za sve realne brojeve x.

3. U kružnicu polumjera 1 upisan je četverokut $ABCD$, pri čemu je $\overline{AD}$ promjer kružnice.

   Dokaži jednakost

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|AB|\cdot|BC|\cdot|CD|=4.$$

4. Oko polukugle polumjera r opisan je stožac duljine visine H, tako da su baze polukugle i stošca koncentrični krugovi. Izračunaj volumen onog dijela stošca koji ne pripada polukugli, tj. izrazi taj volumen pomoću r i H.

5. Između šest otoka uspostavljene su brodske veze. Svaki par otoka povezan je ili trajektom ili katamaranom. Dokaži da postoje tri otoka od kojih su svaka dva od njih povezana istovrsnom brodskom vezom.

Svaki zadatak se boduje s 20 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Državno natjecanje, Kraljevica, 26. - 29. travnja 2006.

Zadaci za **IV. razred** srednje škole

B varijanta

1. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_n &= n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Kojem broju je jednak a_{2006}?

2. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

3. Valjkasta posuda polumjera osnovke $r = 4$ cm i duljine visine $v = 16$ cm napunjena je vodom. Odredi kut za koji treba nagnuti posudu prema ravnini osnovke tako da iz nje iscuri četvrtina vode.

4. Odredi tangens kuta koji zatvaraju zajedničke tangente krivulja $x^2 + 2y^2 = 2$ i $y^2 = 4x$.

5. Između šest otoka uspostavljene su brodske veze. Svaki par otoka povezan je ili trajektom ili katamaranom. Dokaži da postoje tri otoka od kojih su svaka dva od njih povezana istovrsnom brodskom vezom.

Svaki zadatak se boduje s 20 bodova.

2A 1. zad
3B 2. zad

Državno natjecanje 2006., I. razred, B varijanta – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Neka je $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ i $y = \dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}$.
Dokaži da je $(x+1)(y+1) = 2$.

Rješenje.
Vrijedi

$$x+1 = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc}$$

i

$$\begin{aligned} y+1 &= \frac{(a-b+c)(a+b-c)+(a+b+c)(b+c-a)}{(a+b+c)(b+c-a)} \\ &= \frac{[a^2-(b-c)^2]+[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2-a^2} \\ &= \frac{a^2-b^2-c^2+2bc-a^2+b^2+c^2+2bc}{-a^2+b^2+c^2+2bc} \\ &= \frac{4bc}{-a^2+b^2+c^2+2bc}. \end{aligned}$$

Sada izravno slijedi

$$(x+1)(y+1) = 2.$$

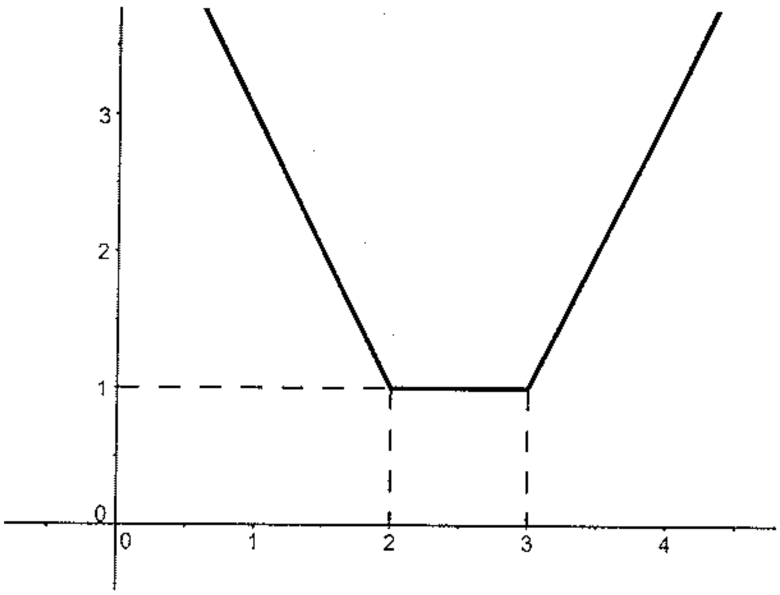
2. Za koje realne brojeve a jednadžba

$$|x-2| + |3-x| = a$$

ima točno dva rješenja ?

Rješenje.

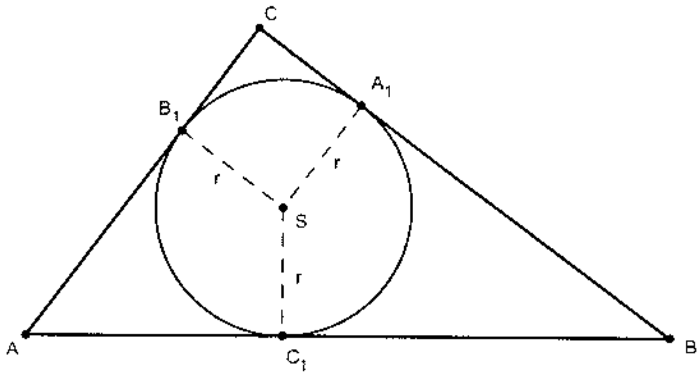
Najprije skicirajmo krivulju $y = |x-2| + |3-x|$.
Za $x < 2$ je $y = -x+2+3-x = 5-2x$.
Za $x \in [2,3]$ je $y = x-2+3-x = 1$.
Za $x > 3$ je $y = x-2-3+x = 2x-5$.



Jednadžba $|x-2|+|3-x|=a$ ima točno dva rješenja za one vrijednosti a za koje pravac $y=a$ siječe krivulju u točno dvije točke, tj. za $a>1$.

3. U pravokutnom trokutu ABC ($\gamma = 90°$), središte upisane kružnice udaljeno je od vrhova A, B, C redom za $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{2}$ cm. Odredi polumjer tom trokutu opisane kružnice.

Rješenje.
Neka je S središte trokutu upisane kružnice, r polumjer upisane, R polumjer opisane kružnice, te neka su A_1, B_1 i C_1 dirališta stranica trokuta i upisane kružnice.



Najprije uočimo da je hipotenuza pravokutnog trokuta promjer trokutu opisane kružnice. Zato je traženi polumjer polovica duljine hipotenuze.

Također je poznata činjenica da je $|AC_1| = |AB_1|$, $|BC_1| = |BA_1|$ i $|CA_1| = |CB_1|$.

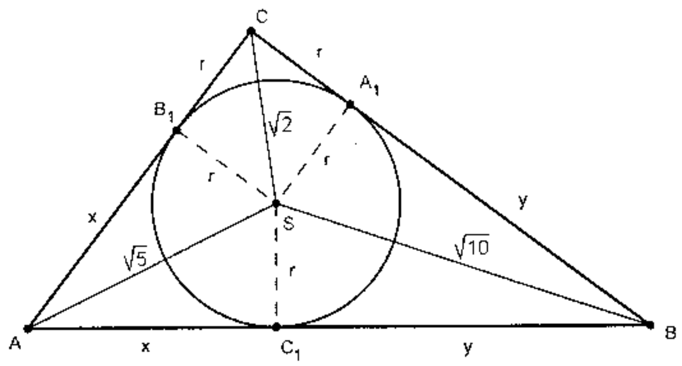
Pritom, zbog toga što je kut $\sphericalangle ACB$ pravi, četverokut CB_1SA_1 mora biti kvadrat, pa je $|CA_1| = |CB_1| = r$.

Uvedimo oznake $x = |AC_1| = |AB_1|$ i $y = |BC_1| = |BA_1|$.

Iz pravokutnih trokuta AB_1S, BC_1S i CA_1S imamo redom

$$x^2+r^2=5, \quad y^2+r^2=10, \quad 2r^2=2\,.$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi $r=1$, a potom iz prve dvije $x=2$ i $y=3$.



Konačno je $R=\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{5}{2}$.

4. Dokaži da ne postoje neparni cijeli brojevi x, y, z za koje vrijedi

$$(x+y)^2+(x+z)^2=(y+z)^2.$$

Rješenje.
Polaznu jednakost

$$(x+y)^2+(x+z)^2=(y+z)^2,$$

redom transformiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2+x^2+2xz+z^2 &= y^2+2yz+z^2,\\ x^2+xy+xz &= yz,\\ x^2+xy+xz+yz &= 2yz,\\ x(x+y)+z(x+y) &= 2yz,\\ (x+y)(x+z) &= 2yz. \end{aligned}$$

Kad bi x, y i z bili svi neparni, $x+y$ i $x+z$ bi bili parni, a yz neparan, pa bi lijeva strana bila djeljiva s 4, a desna ne bi, što je kontradikcija! Zato ne postoje neparni brojevi x, y, z koji zadovoljavaju danu jednažbu.

5. Razred od 28 učenika dobio je za domaću zadaću 8 zadataka. Svaki učenik riješio je točno dva zadatka, a nikoja dva učenika nisu riješila ista dva zadatka. Pokaži da je svaki zadatak riješilo jednako mnogo učenika. Koliko?

Rješenje.
Parova zadataka ima $\frac{8\cdot 7}{2}=28$, tj. jednako mnogo kao i učenika. Zato za svaki par zadataka postoji točno jedan učenik koji je riješio upravo njih. Svaki zadatak se nalazi u 7 parova, pa ga je riješilo točno 7 učenika.

Državno natjecanje 2006., II. razred, B varijanta – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Ako je $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, izračunajte zbroj

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{2006}.$$

Rješenje.

Primijetimo da je

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z^2 = i, \quad z^3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad z^4 = -1,$$

$$z^5 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad z^6 = -i, \quad z^7 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad z^8 = 1,$$

pa je

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^7 = 0.$$

Kako je $z^k = z^{8l+k}$, $k \in \{0,1,2,\ldots,7\}$, $l \in \mathbb{N}$, i kako je $2006 = 8 \cdot 250 + 6$, dani zbroj S možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} S &= (1 + z + z^2 + \ldots + z^7)(1 + z^8 + z^{2\cdot 8} + \ldots + z^{249\cdot 8}) \\ &\quad + (1 + z + z^2 + \ldots + z^6) \cdot z^{250\cdot 8} \\ &= 1 + z + z^2 + \ldots + z^6 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2. Odredi koliko rješenja ima sustav jednadžbi

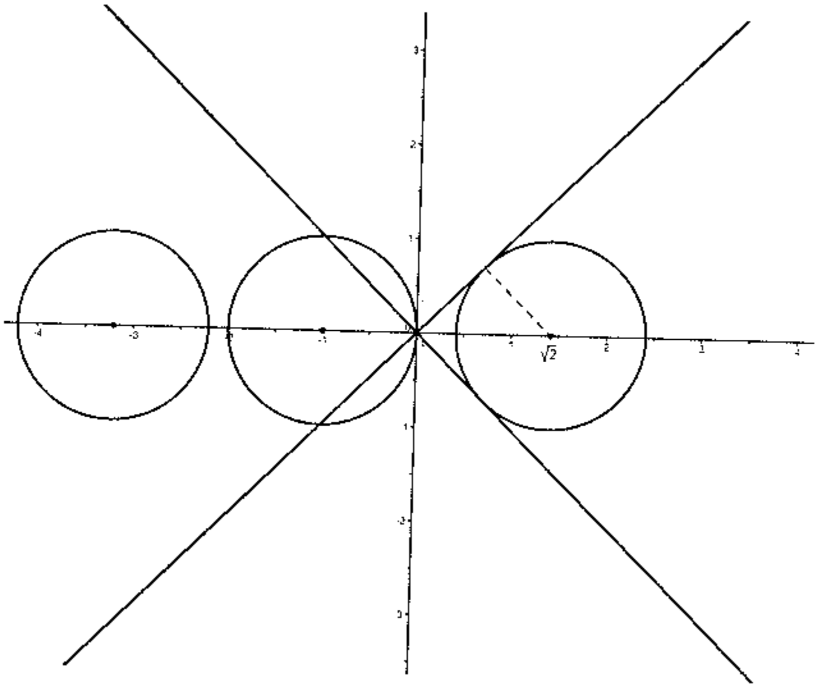
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0, \\ (x-a)^2 + y^2 &= 1, \end{aligned}$$

ovisno o vrijednosti realnog parametra a.

Prvo rješenje (geometrijsko).

Iz prve jednadžbe dobivamo $y = \pm x$, a to su jednadžbe dvaju pravaca koji se sijeku u ishodištu.

Drugu jednadžbu zadovoljavaju sve točke kružnice sa središtem u točki $(a, 0)$ polumjera 1.



Iz crteža vidimo da za

$\lvert a\rvert > \sqrt{2}$	sustav nema rješenja;
$\lvert a\rvert = \sqrt{2}$	sustav ima dva rješenja;
$\lvert a\rvert = 1$	sustav ima tri rješenja;
$\lvert a\rvert < 1$ ili $1 < \lvert a\rvert < \sqrt{2}$	sustav ima četiri rješenja.

Drugo rješenje (algebarsko).

Iz prve jednadžbe je $y^2 = x^2$ ili $y = \pm x$, pa uvrštavanjem u drugu dobivamo kvadratnu jednažbu

$$2x^2 - 2ax + (a^2 - 1) = 0,$$

čija su rješenja

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{2 - a^2}.$$

Za $2 - a^2 < 0$, tj. $|a| > \sqrt{2}$ - nema rješenja.

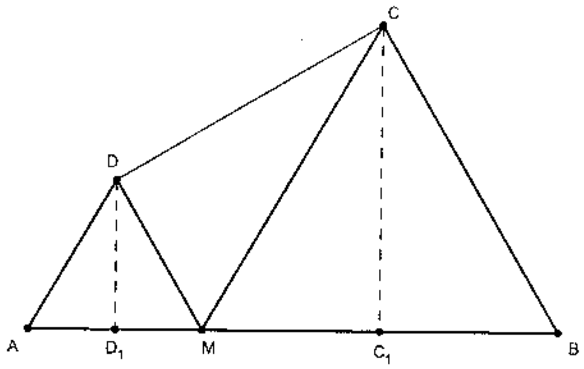
Za $2 - a^2 = 0$, tj. $|a| = \sqrt{2}$, slijedi $x = a$, $y = \pm a$ - dva rješenja.

Za $a - \sqrt{2 - a^2} = 0$, tj. $|a| = 1$ - tri rješenja.

U svim preostalim slučajevima, tj. za $|a| < 1$ i $1 < |a| < \sqrt{2}$, postoje četiri rješenja.

3. Na dužini $\overline{AB}$ odabrana je točka M i zatim su s iste strane dužine $\overline{AB}$ konstruirani jednakostranični trokuti AMD i MBC. Dokaži da četverokut $ABCD$ ima najmanju površinu ako je M polovište dužine $\overline{AB}$.

Rješenje.
Površina četverokuta $ABCD$ jednaka je zbroju polovina površina jednakostraničnih trokuta AMD i MBC i površine trapeza D_1C_1CD.



Uz oznake $|AB| = a$, $|AM| = x$, vrijedi $|BM| = a - x$, $|C_1D_1| = \frac{a}{2}$, pa je tražena površina

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-x)^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{(a-x)\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{a}{2} \\ &= \frac{x^2\sqrt{3}}{4} - \frac{ax\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

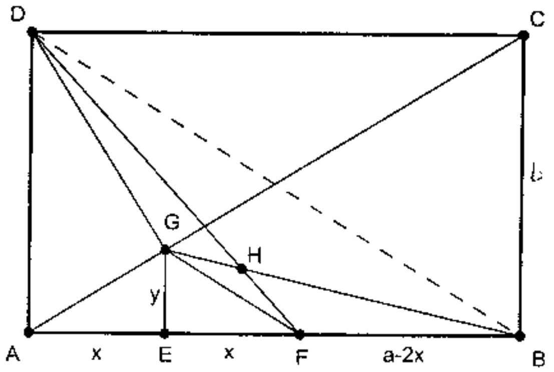
Kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$, $a > 0$ poprima minimum za $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. U našem slučaju je $x_0 = \frac{a}{2}$.

Dakle, točka M mora biti u polovištu dužine $\overline{AB}$.

4. Neka su E i F točke na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ takve da je $|AE| = |EF|$. Okomica na AB u točki E siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki G, a dužine $\overline{DF}$ i $\overline{BG}$ sijeku se u točki H. Dokaži da su površine trokuta FBH i GHD jednake.

Prvo rješenje.

Uočimo da su kutovi $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle EAG$ i $\sphericalangle ABD$ jednaki, pa su dužine $\overline{FG}$ i $\overline{BD}$ paralelne. Trokuti GFB i GFD imaju zajedničku osnovicu, a zbog paralelnosti dužina $\overline{FG}$ i $\overline{BD}$ jednake su im i visine na tu osnovicu. Stoga su im jednake i površine jer je $P(GFB) = P(GFD)$, pa oduzimanjem zajedničkog dijela FGH dobivamo $P(FBH) = P(GHD)$.



Drugo rješenje.
Uz oznake kao na slici, površina trokuta FBG je $\frac{(a-2x)y}{2}$. Površina trokuta GFD jednaka je površini trokuta AFD umanjenoj za površinu trapeza $DAEG$ i površinu trokuta EFG, odnosno

$$P(GFD) = \frac{2x \cdot b}{2} - \frac{(b+y)x}{2} - \frac{xy}{2}.$$

Trokuti AEG i ABC su slični, pa je

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \quad \text{tj.} \quad y = \frac{bx}{a}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(GFD) &= xb - \frac{1}{2}\left(b + \frac{bx}{a}\right)x - \frac{1}{2}x \cdot \frac{bx}{a} = \frac{1}{2}bx - \frac{bx^2}{a} \\ &= \frac{bx}{2a}(a-2x) = \frac{1}{2}y(a-2x) = P(FBG). \end{aligned}$$

Kako su površine trokuta FBG i GFD jednake, slijedi da su i površine trokuta FBH i GHD jednake.

5. Mogu li se bridovi tetraedra označiti brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (svaki broj za točno jedan brid) tako da zbrojevi brojeva bridova na svakoj njegovoj strani budu međusobno jednaki?

Rješenje.
Pretpostavimo da je moguće označiti bridove tetraedra na traženi način. Neka je S suma zbrojeva na svakoj strani.
Vrijedi

$$a + b + e = e + c + d = a + d + f = b + c + f = S,$$

gdje su a, b, c, d, e, f brojevi pridruženi bridovima kao na slici. Kako je

$$\begin{aligned} 4S &= (a+b+e) + (e+c+d) + (a+d+f) + (b+c+f) \\ &= 2(a+b+c+d+e+f) = 2 \cdot (1+2+3+4+5+6) \\ &= 2 \cdot 21 = 42, \end{aligned}$$

Državno natjecanje 2006., III. razred, B kategorija – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Ako vrijede jednakosti

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \quad \text{i} \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1,$$

dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}=1.$$

Rješenje.
Kvadriranjem druge jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+2\left(\frac{ba}{yz}+\frac{ca}{zx}+\frac{ab}{xy}\right) \\
&= \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+\left(\frac{ba}{yz}+\frac{ca}{zx}+\frac{ab}{xy}\right) \\
&= \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}+2\cdot\frac{abc}{xyz}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right) \\
&= \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}.
\end{aligned}$$

2. Dokaži da nejednakost

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \le \sqrt{2}$$

vrijedi za sve realne brojeve x.

Rješenje.
Kako je

$$\begin{aligned}
1+\sin 2x &= \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=(\sin x+\cos x)^2, \\
1-\sin 2x &= (\sin x-\cos x)^2,
\end{aligned}$$

nejednakost prelazi u

$$\Big||\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x|\Big| \le \sqrt{2}. \qquad (*)$$

Izraz s lijeve strane je jednak $2|\sin x|$ ili $2|\cos x|$. Zbog periodičnosti funkcija sin i cos dovoljno je promatrati $x\in[0,2\pi]$. Moramo promatrati sljedeća četiri slučaja.

1° Za $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ vrijedi $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x$, pa je $\sin x + \cos x > 0$ i $\sin x - \cos x < 0$, te $(*)$ postaje

$$|\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Što je zadovoljeno za svaki broj x iz promatranog intervala.

2° Za $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ vrijedi $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x$, pa je $\sin x + \cos x \geq 0$ i $\sin x - \cos x \geq 0$, i $(*)$ postaje

$$|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ovu nejednakost zadovoljavaju sve točke iz promatranog intervala.

3° Za $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ vrijedi $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2} < -\cos x$, pa je $\sin x + \cos x < 0$ i $\sin x - \cos x > 0$, i $(*)$ postaje

$$|\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zadovoljavaju sve točke iz ovog intervala.

4° Za $x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ vrijedi $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq -\sin x$, pa je $\sin x + \cos x \leq 0$ i $\sin x - \cos x \leq 0$, i $(*)$ postaje

$$|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zadovoljavaju sve točke iz ovog intervala.

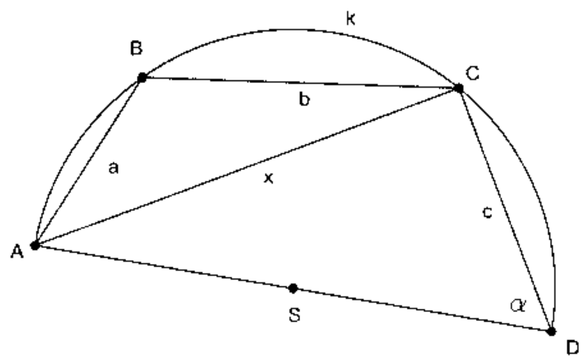
Dakle, nejednakost je zadovoljena za svako $x \in [0, 2\pi]$ pa i za svako $x \in \mathbb{R}$.

3. U kružnicu polumjera 1 upisan je četverokut $ABCD$, pri čemu je $\overline{AD}$ promjer kružnice. Dokaži jednakost

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AB| \cdot |BC| \cdot |CD| = 4.$$

Rješenje.

Duljina promjera polukružnice je $|AD| = 2$. Označimo s $\alpha = \sphericalangle ADC$. Kako je četverokut $ABCD$ tetivni imamo $\sphericalangle ABC = \pi - \alpha$. ($B$ i C su s iste strane od $\overline{AD}$.)



Kako je trokut ACD pravokutan, ($\sphericalangle ACD = \frac{\pi}{2}$), vrijedi

$$x^2 + c^2 = |AD|^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + c^2 = 4 \tag{1}$$

Iz trokuta ACD je $\cos\alpha = \dfrac{c}{|AD|}$ tj. $c = 2\cos\alpha$. (2)

Nadalje, iz trokuta ABC dobivamo

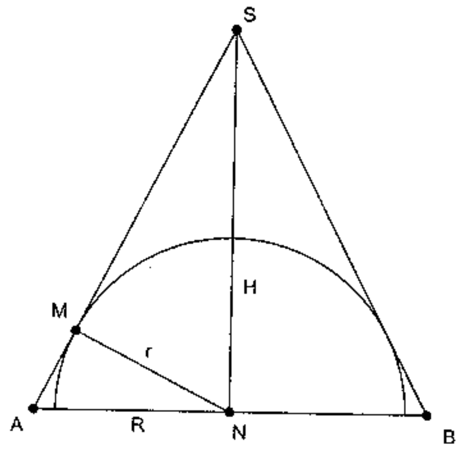
$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha,$$

$$a^2 + b^2 = x^2 - 2ab\cos\alpha. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) slijedi $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$.

4. Oko polukugle polumjera r opisan je stožac duljine visine H, tako da su baze polukugle i stošca koncentrični krugovi. Izračunaj volumen onog dijela stošca koji ne pripada polukugli, tj. izrazi taj volumen pomoću r i H.

Rješenje.



Koristimo oznake kao na slici. Iz sličnosti trokuta AMN i ANS dobivamo

$$\begin{aligned} |AN| : |MN| &= |AS| : |NS| \\ R : r &= \sqrt{H^2 + R^2} : H, \end{aligned}$$

tj.

$$R^2 = \frac{r^2 H^2}{H^2 - r^2}. \tag{1}$$

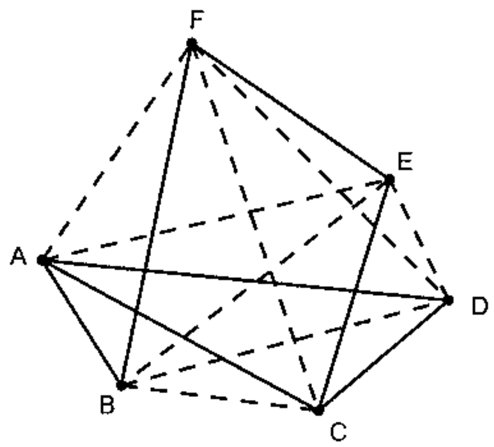
Traženi volumen jednak je razlici volumena V_S stošca i volumena V_K polukugle tj.

$$\begin{aligned} V &= V_S - V_K = \frac{1}{3}R^2\pi H - \frac{2}{3}r^3\pi \\ &\overset{(1)}{=} \frac{r^2\pi}{3}\left(\frac{H^3}{H^2 - r^2} - 2r\right). \end{aligned}$$

5. Između šest otoka uspostavljene su brodske veze. Svaki par otoka povezan je ili trajektom ili katamaranom. Dokaži da postoje tri otoka od kojih su svaka dva od njih povezana istovrsnom brodskom vezom.

Rješenje.

Uočimo otok A. On je povezan s prostalih pet otoka trajektom ili katamaranom. Stoga je barem s tri otoka povezan s istom vrstom broda: trajektom ili katamaranom. Možemo pretpostaviti da je povezan s otocima B, C i D trajektom. Ako su neka dva od njih, recimo B i C povezani trajektom, tada su A, B i C međusobno povezani trajektom. Ako nikoja dva od B, C i D nisu povezani trajektom, onda su oni međusobno povezani katamaranom. Dakle u svakom slučaju postoje tri otoka koji su povezani istovrsnom brodskom linijom.



Državno natjecanje 2006., IV. razred, B varijanta – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_n &= n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Kojem broju je jednak a_{2006}?

Rješenje.
Imamo

$$a_n = 1 + 2 + \ldots + 2006 = \frac{2005 \cdot 2006}{2} = 2\,011\,015.$$

2. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

Rješenje.
Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

1° Baza indukcije. Za $n = 1$ je $\frac{1}{\sqrt{1}} = \sqrt{1}$.

2° Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \geq 1$ vrijedi dana nejednakost. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}. \qquad (*)$$

Zadnja nejednakost vrijedi ako i samo ako je $\sqrt{n(n+1)} + 1 \geq n + 1$, tj. $\sqrt{n(n+1)} \geq n$. Kako je ova nejednakost ispunjena, vrijedi i nejednakost $(*)$

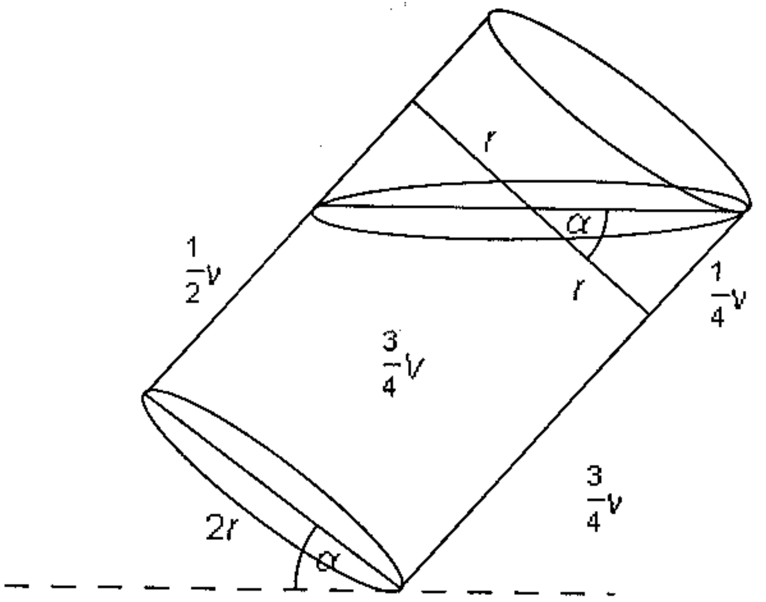
3. Valjkasta posuda polumjera osnovke 4 cm i duljine visine 16 cm napunjena je vodom. Odredi kut za koji treba nagnuti posudu prema ravnini osnovke tako da iz nje iscuri četvrtina vode.

Rješenje.

Sa slike vidimo

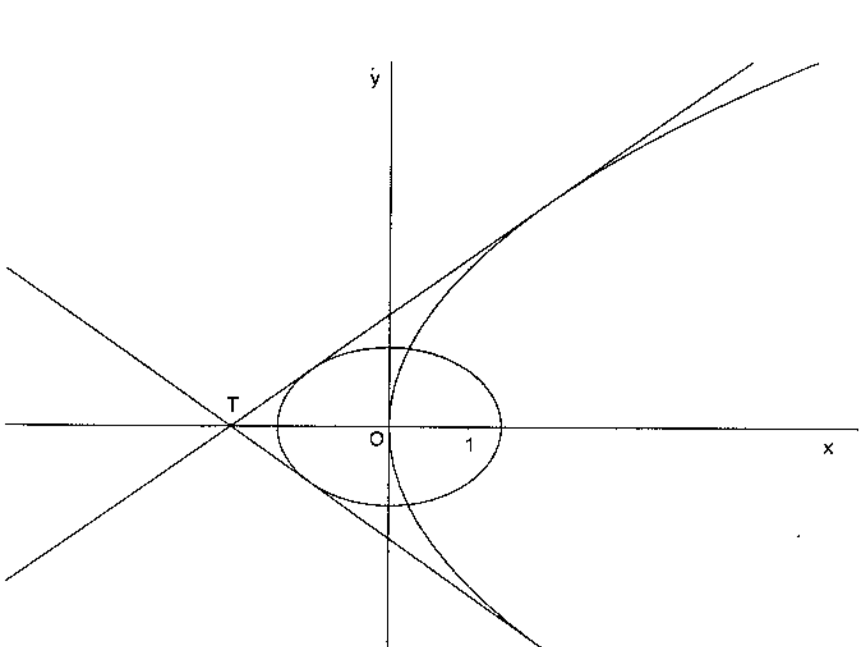
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{4} v}{r} = 1.$$

Posudu treba nagnuti pod kutom $\alpha = 45°$.



4. Odredi tangens kuta koji zatvaraju zajedničke tangente krivulja
$x^2 + 2y^2 = 2$ i $y^2 = 4x$.

Rješenje.



Uvjet da pravac $y = kx + l$ bude tangenta elipse s poluosima a i b jest $a^2k^2 + b^2 = l^2$, dok je uvjet da pravac $y = kx + l$ bude tangenta parabole $y^2 = 2px$ dan s $p = 2kl$.

Tako dobivamo sustav jednadžbi s nepoznanicama k i l:

$$2k^2 + 1 = l^2, \qquad 2 = 2kl,$$

odakle dobivamo bikvadratnu jednadžbu po k:

$$2k^4 + k^2 - 1 = 0,$$

čija su realna rješenja $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg}\varphi_1$ i $k_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg}\varphi_2$, odakle slijedi

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{2k_1}{1 - k_1^2} = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}.$$

5. Između šest otoka uspostavljene su brodske veze. Svaki par otoka povezan je ili trajektom ili katamaranom. Dokaži da postoje tri otoka od kojih su svaka dva od njih povezana istovrsnom brodskom vezom.

Rješenje.
Uočimo otok A. On je povezan s prostalih pet otoka trajektom ili katamaranom. Stoga je barem s tri otoka povezan s istom vrstom broda: trajektom ili katamaranom. Možemo pretpostaviti da je povezan s otocima B, C i D trajektom. Ako su neka dva od njih, recimo B i C povezani trajektom, tada su A, B i C međusobno povezani trajektom. Ako nikoja dva od B, C i D nisu povezani trajektom, onda su oni međusobno povezani katamaranom. Dakle u svakom slučaju postoje tri otoka koji su povezani istovrsnom brodskom linijom.