

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
13. veljače 2006. godine

8. razred

1. Izračunaj

$$\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1.5} - \sqrt{3.5}}{\sqrt{2}}$$

2. Ako zbroju znamenaka nekog dvoznamenkastog broja pribrojimo kvadrat zbroja njegovih znamenaka, dobivamo taj dvoznamenkasti broj. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve s tim svojstvom.
3. Riješi sustav jednačbi

$$\begin{aligned}x + y &= 15 \\x^2 + y^2 &= 117.\end{aligned}$$

4. Dužine \overline{AB} i \overline{CD} su paralelne tetive kružnice polumjera 13 cm. Odredi udaljenost tih tetiva ako su im duljine 24 cm i 10 cm.
5. Točkama A i B kružnice k povučene su tangente AC i BC tako da je $|AC| = |BC| = 27$ cm. Neka je D točka na kružnici, različita od A i B , takva da tangenta u toj točki siječe tangentu AC u točki E i tangentu BC u točki F , pri čemu točke E i F redom pripadaju dužinama \overline{AC} i \overline{BC} . Odredi opseg trokuta CEF .

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

2006 g. OFC

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Racionalizacijom nazivnika u prva dva člana izraza dobivamo:

$$\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$$

4 BODA

Nadalje, vrijedi $\frac{\sqrt{1.5} - \sqrt{3.5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$

3 BODA

Konačno $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$.

3 BODA

UKUPNO 10 BODOVA

2. Iz uvjeta zadatka slijedi da je $a + b + (a + b)^2 = 10a + b$, odnosno $(a + b)^2 = 9a$.

2 BODA

Iz prethodne jednakosti slijedi da je $9a$ potpun kvadrat, odnosno znamenka a mora biti potpun kvadrat,

2 BODA

pa znamenka a može poprimiti samo tri vrijednosti $a = 1$, $a = 4$ i $a = 9$.

2 BODA

Ako je $a = 1$, onda je $(a + b)^2 = 9$, tj. $a + b = 3$, $b = 2$, pa je broj 12 rješenje.

2 BODA

Ako je $a = 4$, onda je $(a + b)^2 = 36$, tj. $a + b = 6$, $b = 2$, pa je broj 42 rješenje.

2 BODA

Ako je $a = 9$, onda je $(a + b)^2 = 81$, tj. $a + b = 9$, $b = 0$, pa je broj 90 rješenje.

2 BODA

UKUPNO 10 BODOVA

3. Kvadriramo li jednakost $x + y = 15$, dobivamo $x^2 + 2xy + y^2 = 225$.

3 BODA

Kako je $x^2 + y^2 = 117$, slijedi da je $2xy = 225 - 117 = 108$.

3 BODA

Nadalje, imamo da je $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 117 - 108 = 9$, pa je $x - y = 3$ ili $x - y = -3$.

2 BODA

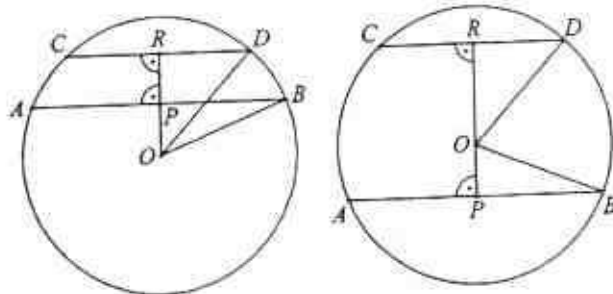
Rješenje sustava $x + y = 15$, $x - y = 3$ je $x = 9$ i $y = 6$.

2 BODA

Rješenje sustava $x + y = 15$, $x - y = -3$ je $x = 6$ i $y = 9$.

UKUPNO 10 BODOVA

4. Istaknimo dijametara kružnice koji je okomit na tetive \overline{AB} i \overline{CD} . Neka su P i R točke presjeka tog dijametara sa tetivama \overline{AB} i \overline{CD} redom. Vidimo da imamo dva slučaja u ovisnosti o tome da li se točke P i R nalaze s iste ili sa različitih strana središta O kružnice, što vidimo na sljedećoj slici:



2 BODA

Kako su točke P i R polovišta tetiva \overline{AB} i \overline{CD} redom, iz Pitagorinog poučka slijedi da je

$$|OP| = \sqrt{|OB|^2 - |PB|^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \quad ; \quad |OR| = \sqrt{|OD|^2 - |RD|^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

4 BODA

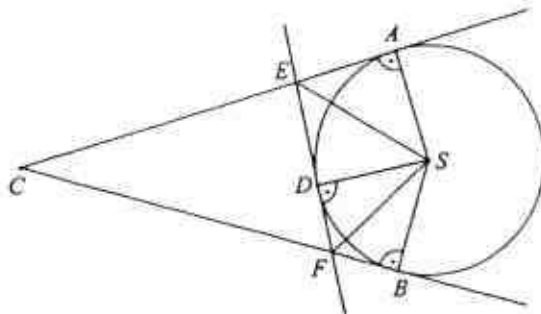
U prvom slučaju udaljenost tetiva je $|PR| = |OR| - |OP| = 12 - 5 = 7$ cm.

2 BODA

U drugom slučaju udaljenost tetiva je $|PR| = |OR| + |OP| = 12 + 5 = 17$ cm.

UKUPNO 10 BODOVA

5. SKICA



Pokažimo prvo da su trokuti SAE i SED sukladni. Sukladnost tih trokuta slijedi iz činjenice da im je stranica \overline{SE} zajednička, te zbog $\overline{SA} = \overline{SD}$ i $\sphericalangle SAE = \sphericalangle SDE$. Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $|AE| = |DE|$.

Analogno se pokazuje da su trokuti SDF i SFB sukladni, pa iz te sukladnosti također slijedi da je $|BF| = |DF|$.

Konačno, za opseg trokuta CFE vrijedi

$$\begin{aligned} |CE| + |EF| + |CF| &= |CE| + |ED| + |DF| + |CF| \\ &= |CE| + |AE| + |BF| + |CF| = |AC| + |BC| \\ &= 27 + 27 = 54\text{cm} \end{aligned}$$

1 BOD

3 BODA

1 BOD

2 BODA

3 BODA

UKUPNO 10 BODOVA