MINISTARSTVO ZNANOSTI, PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
13. veljače 2006. godine

8. razred

1. Izračunaj

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{1.5}-\sqrt{3.5}}{\sqrt{2}}.$$

2. Ako zbroju znamenaka nekog dvoznamenkastog broja pribrojimo kvadrat zbroja njegovih znamenaka, dobivamo taj dvoznamenkasti broj. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve s tim svojstvom.

3. Riješi sustav jednadžbi

$$x+y=15$$
$$x^2+y^2=117.$$

4. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su paralelne tetive kružnice polumjera 13 cm. Odredi udaljenost tih tetiva ako su im duljine 24 cm i 10 cm.

5. Točkama A i B kružnice k povučene su tangente AC i BC tako da je $|AC|=|BC|=$ 27 cm. Neka je D točka na kružnici, različita od A i B, takva da tangenta u toj točki siječe tangentu AC u točki E i tangentu BC u točki F, pri čemu točke E i F redom pripadaju dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Odredi opseg trokuta CEF.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED 2006 g. OPĆ

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Racionalizacijom nazivnika u prva dva člana izraza dobivamo:
$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$. 4 BODA

Nadalje, vrijedi $\frac{\sqrt{1.5}-\sqrt{3.5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$. 3 BODA

Konačno $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}$. 3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

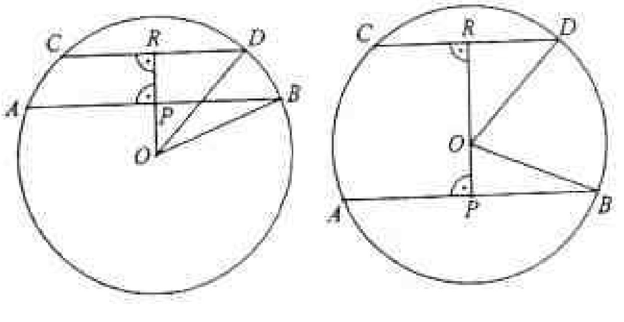
2. Iz uvjeta zadatka slijedi da je $a+b+(a+b)^2 = 10a+b$, odnosno $(a+b)^2 = 9a$. 2 BODA
Iz prethodne jednakosti slijedi da je $9a$ potpun kvadrat, odnosno znamenka a mora biti potpun kvadrat,
pa znamenka a može poprimiti samo tri vrijednosti $a=1$, $a=4$ i $a=9$. 2 BODA
Ako je $a=1$, onda je $(a+b)^2 = 9$, tj. $a+b=3$, $b=2$, pa je broj 12 rješenje. 2 BODA
Ako je $a=4$, onda je $(a+b)^2 = 36$, tj. $a+b=6$, $b=2$, pa je broj 42 rješenje. 2 BODA
Ako je $a=9$, onda je $(a+b)^2 = 81$, tj. $a+b=9$, $b=0$, pa je broj 90 rješenje. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Kvadriramo li jednakost $x+y=15$, dobivamo $x^2+2xy+y^2=225$. 3 BODA
Kako je $x^2+y^2=117$, slijedi da je $2xy = 225-117 = 108$. 3 BODA
Nadalje, imamo da je $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 = 117-108 = 9$, pa je $x-y=3$ ili $x-y=-3$. 2 BODA
Rješenje sustava $x+y=15$, $x-y=3$ je $x=9$ i $y=6$. 2 BODA
Rješenje sustava $x+y=15$, $x-y=-3$ je $x=6$ i $y=9$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Istaknimo dijametar kružnice koji je okomit na tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Neka su P i R točke presjeka tog dijametra sa tetivama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom. Vidimo da imamo dva slučaja u ovisnosti o tome da li se točke P i R nalaze s iste ili sa različitih strana središta O kružnice, što vidimo na sljedećoj slici:

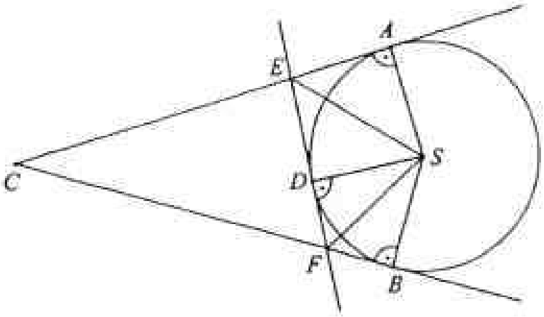


2 BODA

Kako su točke P i R polovišta tetiva $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom, iz Pitagorinog poučka slijedi da je
$|OP| = \sqrt{|OB|^2 - |PB|^2} = \sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$ i $|OR| = \sqrt{|OD|^2 - |RD|^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$. 4 BODA
U prvom slučaju udaljenost tetiva je $|PR| = |OR| - |OP| = 12-5 = 7\,\text{cm}$. 2 BODA
U drugom slučaju udaljenost tetiva je $|PR| = |OR| + |OP| = 12+5 = 17\,\text{cm}$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. SKICA



1 BOD

Pokažimo prvo da su trokuti SAE i SED sukladni. Sukladnost tih trokuta slijedi iz činjenice da im je stranica $\overline{SE}$ zajednička, te zbog $\overline{SA} = \overline{SD}$ i $\sphericalangle SAE = \sphericalangle SDE$. 3 BODA

Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $|AE| = |DE|$. 1 BOD

Analogno se pokazuje da su trokuti SDF i SFB sukladni, pa iz te sukladnosti također slijedi da je $|BF| = |DF|$ 2 BODA

Konačno, za opseg trokuta CFE vrijedi

$$\begin{aligned} |CE| + |EF| + |CF| &= |CE| + |ED| + |DF| + |CF| \\ &= |CE| + |AE| + |BF| + |CF| = |AC| + |BC| \\ &= 27 + 27 = 54\text{cm} \end{aligned}$$

3 BODA

UKUPNO 10 BODOVA