MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, Županijsko natjecanje

Zadaci za **I. razred** srednje škole, **A varijanta**

14. ožujka 2006.

1. Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{5n-23}{n-7}$ cijeli broj.

2. Ako za realne brojeve x, y vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 4, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 &= 8, \end{aligned}$$

dokaži da je

$$x^6 + x^3y^3 + y^6$$

prirodan broj i odredi ga.

3. Neka je A prirodan broj s parnim brojem n znamenaka, a B broj dobiven bilo kojom promjenom poretka znamenaka broja A, tako da vrijedi $A + B = 10^n$.

   (a) Odredi barem jedan par brojeva A i B koji zadovoljavaju gornje svojstvo za $n = 4$.

   (b) Dokaži da je za svaki parni broj n svaki od brojeva A i B s gornjim svojstvom djeljiv s 10.

4. Dan je trokut ABC. Neka su L i M redom točke u kojima simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta s vrhom C sijeku pravac AB. Ako je $|CL| = |CM|$, dokaži da vrijedi

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 4R^2,$$

gdje je R duljina polumjera kružnice opisane trokutu ABC.

5. Odredi najveći prirodni broj n takav da postoji niz od n realnih brojeva sa sljedećim svojstvima:

   (i) zbroj svaka tri uzastopna člana niza je pozitivan,

   (ii) zbroj svakih pet uzastopnih članova niza je negativan.

Županijsko natjecanje 2006., I. razred, A varijanta – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{5n-23}{n-7}$ cijeli broj.

Rješenje. Zadani razlomak se može zapisati u obliku

$$\frac{5n-23}{n-7} = \frac{5n-35+12}{n-7} = 5 + \frac{12}{n-7}. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Dakle, dani izraz je cijeli broj ako i samo ako je 12 djeljivo s $n-7$. (5 bodova)
Imamo

$$n-7 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}, \qquad \text{(4 boda)}$$

odnosno

$$n \in \{-5, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 19\}. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Napomene.
— Učenik koji rješava na ovaj način ali zaboravi slučajeve $n-7 \in \{-1, -2, -3, -4, -6, -12\}$, pa dobije samo 6 rješenja, dobiva najviše 15 bodova.

— Učenik koji ispitivanjem dobije neka (ali ne sva) rješenja dobije po 1 bod za svako dobiveno rješenje.

— Iznimno, učenik koji dokaže da drugih rješenja nema (ako ispita sve $n \in \{-5, -4, \ldots, 19, 20\}$ i dokaže da $n > 20$ i $n < -5$ vodi na kontradikciju) dobiva maksimalan broj bodova.

2. Ako za realne brojeve x, y vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 4, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 &= 8, \end{aligned}$$

dokaži da je

$$x^6 + x^3y^3 + y^6$$

prirodan broj i odredi ga.

Rješenje.
Za dokaz da je zadani izraz prirodan broj dovoljno ga je izračunati. Prvi korak u računu je iz danih jednakosti odrediti vrijednosti izraza x^2+y^2 i xy. (3 boda)
To se može na nekoliko sličnih načina. Na primjer, iz druge jednadžbe slijedi

$$\begin{aligned} 8 &= x^4 + x^2y^2 + y^4 \\ &= (x^2+y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\ &= 4(x^2-xy+y^2), \end{aligned}$$

gdje smo u posljednjem retku koristili prvu jednakost. Dakle,

$$x^2 - xy + y^2 = 2. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem prve od zadanih jednakosti i ove posljednje dobivene slijedi:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3, \\ xy &= 1. \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Napomena. Učenik može riješiti ovaj sustav i dobiti: $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, te uvrštavanjem izračunati vrijendost izraza $x^6 + x^3y^3 + y^6$.

Koristeći formulu za zbroj kubova zadani izraz može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} x^6 + x^3y^3 + y^6 &= (x^2+y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + x^3y^3 \\ &= (x^2+y^2)[(x^4 + x^2y^2 + y^4) - 2x^2y^2] + x^3y^3 \end{aligned}$$

(7 bodova)

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti $x^2 + y^2 = 3$ i $xy = 1$, te zadanu vrijednost izraza $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$ dobiva se

$$x^6 + x^3y^3 + y^6 = 3(8 - 2 \cdot 1^2) + 1^3 = 19. \qquad \text{(3 boda)}$$

3. Neka je A prirodan broj s parnim brojem n znamenaka, a B broj dobiven bilo kojom promjenom poretka znamenaka broja A, tako da vrijedi $A + B = 10^n$.

   (a) Odredi barem jedan par brojeva A i B koji zadovoljavaju gornje svojstvo za $n = 4$.

   (b) Dokaži da je za svaki parni broj n svaki od brojeva A i B s gornjim svojstvom djeljiv s 10.

Rješenje.

(a) Ovaj dio zadatka može se riješiti metodom pokušaja i pogrešaka (smije se koristiti (b) dio zadatka) i zadan je da bi učenicima dao ideju za dokaz pod (b). Ima puno rješenja, a jedno od njih je

$$\begin{aligned} A &= 3650, \\ B &= 6350. \end{aligned} \qquad \text{(5 bodova)}$$

(b) Neka su

$$\begin{aligned} A &= \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}, \\ B &= \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1}. \end{aligned}$$

Tada je zbog uvjeta $A + B = 10^n$ zbroj njihovih zadnjih znamenki jednak 0 ili 10.

(2 boda)

Kad bi bilo $a_1 + b_1 = 10$, onda bi iz uvjeta $A + B = 10^n$ slijedilo da je zbroj

$$a_k + b_k = 9,$$

za sve $k = 2, 3, \ldots n$. (3 boda)
Zbrajanjem svih dobivenih jednakosti dobiva se

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n \\ = \; & (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) \; = \; 10 + 9(n-1). \end{aligned}$$

Međutim, lijeva strana te jednakosti je paran broj jer su znamenke broja B zapravo jednake znamenkama broja A (samo u nekom drugom poretku), pa se svaka znamenka pojavljuje u zbroju dva puta. Desna strana iste jednakosti je neparna jer je n paran broj pa je $9(n-1)$ neparan broj. Time smo došli do kontradikcije. (7 bodova)
Dakle, $a_1 + b_1 = 0$, pa mora biti $a_1 = b_1 = 0$, odnosno svaki od brojeva A i B je djeljiv s 10. (3 boda)

4. Dan je trokut ABC. Neka su L i M redom točke u kojima simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta s vrhom C sijeku pravac AB. Ako je $|CL| = |CM|$, dokaži da vrijedi

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 4R^2,$$

gdje je R duljina polumjera kružnice opisane trokutu ABC.

Rješenje.
Uvedimo oznake kao na slici. Simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta sijeku se pod pravim kutom jer je kut među njima jednak

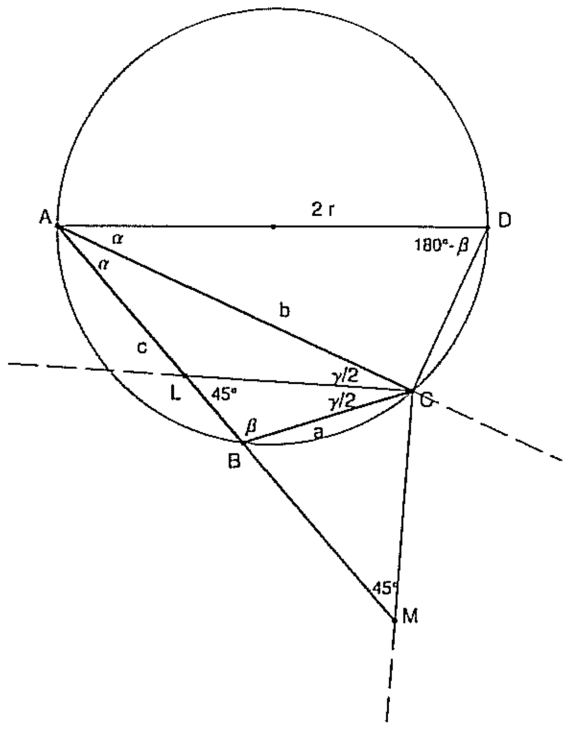
$$\frac{\gamma}{2} + \left(\frac{180^\circ - \gamma}{2}\right) = 90^\circ.$$

Budući da je $|CL| = |CM|$ trokut CLM je jednakokračan pravokutan. (2 boda)
Stoga je $\sphericalangle CLM = \sphericalangle MLC = 45^\circ$, kako je to vanjski kut $\triangle ALC$ i unutarnji kut $\triangle CLB$ slijedi

$$(*) \begin{cases} \alpha + \dfrac{\gamma}{2} & = & 45^\circ, \\[2ex] \beta + \dfrac{\gamma}{2} & = & 135^\circ. \end{cases}$$

(3 boda)

Preostali dio može se napraviti na dva načina.



Prvi način. Uočimo da je dovoljno pokazti da je trokut sa stranicama duljina $|AC|$, $|BC|$ i $2R$ pravokutan. (3 boda)

Neka je D točka na opisanoj kružnici trokuta ABC takva da je $\sphericalangle ACD = 90°$. (2 boda)

Tada je $\triangle ACD$ pravokutan, pa je $|AD|$ promjer kružnice, $|AD| = 2R$. Kako je jedna kateta $\overline{AC}$, prema prethodnom, dovoljno je pokazati da je $|CD| = |BC|$. (3 boda)

Iz tetivnog četverokuta $ABCD$ imamo $\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle ABC = 180° - \beta$, pa je

$$\sphericalangle DAC = 90° - \sphericalangle ADC = \beta - 90°. \qquad \text{(4 boda)}$$

No, prema (∗) $\beta - 90° = 45° - \dfrac{\gamma}{2} = \alpha$, pa su obodni kutovi nad tetivama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ jednaki. Stoga je $|BC| = |CD|$. (3 boda)

Drugi način. Neka je D točka na kružnici opisanoj trokutu ABC takva da je $|CB| = |CD|$. Tada je

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC = \alpha \qquad \text{(5 bodova)}$$

jer su to obodni kutovi nad tetivama jednake duljine, te

$$\sphericalangle CDA = 180° - \sphericalangle CBA = 180° - \beta$$

jer su to nasuprotni kutovi tetivnog četverokuta $ABCD$. (5 bodova)

U trokutu ACD je

$$\begin{aligned}\sphericalangle ACD &= 180° - \sphericalangle DAC - \sphericalangle CDA = 180° - \alpha - (180° - \beta) = \beta - \alpha \\ &= \left(\beta + \tfrac{\gamma}{2}\right) - \left(\alpha + \tfrac{\gamma}{2}\right) = 135° - 45° = 90°.\end{aligned}$$

pa je to pravokutan trokut. 5 bodova

Pritom je hipotenuza jednaka promjeru kružnice $2R$, a katete su duljina $|AC|$ i $|BC|$. Dakle, po Pitagorinom poučku je

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 4R^2. \qquad \text{(5 bodova)}$$

5. Odredi najveći prirodni broj n takav da postoji niz od n realnih brojeva sa sljedećim svojstvima:

(i) zbroj svaka tri uzastopna člana niza je pozitivan,

(ii) zbroj svakih pet uzastopnih članova niza je negativan.

Rješenje.
Za $n = 6$ postoji niz s traženim svojstvima, npr.

$$3, -5, 3, 3, -5, 3. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Napomena. Učenik koji nađe samo primjer za $n = 5$, (npr. $-1 - 13 - 1 - 1$) dobije 2 boda.

Pretpostavimo da postoji niz duljine $n \geqslant 7$ s traženim svojstvima. Odaberimo bilo kojih 7 uzastopnih članova

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$$

takvog niza. Tada zbog (i) vrijedi

$$(1)\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 > 0, \\ a_2 + a_3 + a_4 > 0, \\ a_3 + a_4 + a_5 > 0, \\ a_4 + a_5 + a_6 > 0, \\ a_5 + a_6 + a_7 > 0. \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 0, \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 < 0, \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 0. \end{cases}$$

(5 bodova)

Zbrajanjem nejednakosti (1) dobiva se

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_3 + a_4 + a_5) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_5 + a_6 + a_7) > 0,$$

a zbrajanjem nejednakosti (2)

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + (a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) < 0.$$

Lijeve strane ovi nejednakosti su jednake, pa imamo kontradikciju. (10 bodova)
Znači $n < 7$. Najdulji takav niz ima 6 članova.