MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, Županijsko natjecanje
Zadaci za I. razred srednje škole, B varijanta
14. ožujka 2006.

1. Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{5n-23}{n-7}$ cijeli broj.

2. U kojem trenutku između 13:00 i 14:00 sati satna i minutna kazaljka sata zatvaraju ispruženi kut (180°)?

3. Riješi nejednadžbu
$$x^3 - 3x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \geqslant 0.$$

4. Odredi znamenku jedinica (zadnju znamenku) umnoška
$$(8-5)(8^2-5^2)(8^3-5^3)\dots(8^{2006}-5^{2006}).$$

5. Simetrala hipotenuze pravokutnog trokuta odsijeca trokut čija je površina tri puta manja od površine polaznog trokuta. Odredi šiljaste kutove promatranog trokuta.

Županijsko natjecanje 2006., I. razred, B varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Odredi sve cijele brojeve n za koje je $\frac{5n-23}{n-7}$ cijeli broj.

Rješenje. Zadani razlomak se može zapisati u obliku

$$\frac{5n-23}{n-7} = \frac{5n-35+12}{n-7} = 5 + \frac{12}{n-7}. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Dakle, dani izraz je cijeli broj ako i samo ako je 12 djeljivo s $n-7$. (5 bodova)

Imamo

$$n-7 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12\}, \qquad \text{(4 boda)}$$

odnosno

$$n \in \{-5, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 19\}. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Napomene.

— Učenik koji rješava na ovaj način, ali zaboravi slučajeve $n-7 \in \{-1, -2, -3, -4, -6, -12\}$, pa dobije samo 6 rješenja, dobiva najviše 15 bodova.

— Učenik koji ispitivanjem dobije neka (ali ne sva) rješenja dobije po 1 bod za svako dobiveno rješenje.

— Iznimno, učenik koji dokaže da drugih rješenja nema (ako ispita sve $n \in \{-5, -4, \ldots, 19, 20\}$ i dokaže da $n > 20$ i $n < -5$ vodi na kontradikciju) dobiva maksimalan broj bodova.

2. U kojem trenutku između 13:00 i 14:00 sati satna i minutna kazaljka sata zatvaraju ispruženi kut (180°)?

Prvo rješenje.

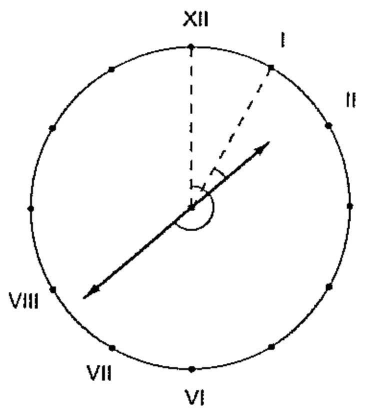
Neka se to dogodi x minuta nakon 13:00.

Velika (minutna) kazaljka za jednu minutu pređe $\frac{1}{60}$ punog kruga, tj. 6°.

Mala (satna) kazaljka za jedan sat pređe 30°, pa za jednu minutu pređe 0.5°. (3 boda)

Nakon x minuta velika kazaljka pređe $6x$ stupnjeva, a mala kazaljka $\frac{1}{2}x$ stupnjeva. (3 boda)

Kazaljke će zatvarati ispružen kut (180°) ako je pređeni kut velike kazaljke za 210° veći od pređenog kuta male kazaljke (mala kazaljka kreće od položaja "1", a velika od položaja "12"). (6 bodova)



Dakle, mora biti

$$6x = 210 + \frac{1}{2}x \qquad \text{(5 bodova)}$$

tj. $x = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11}$.

Kazaljke će zatvarati ispruženi kut u 13 sati i $38\frac{2}{11}$ minuta. (3 boda)

Drugo rješenje.

Velika (minutna) kazaljka za 60 minuta napravi puni krug, pa kut α pređe za

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 60 = \frac{\alpha}{6} \quad \text{minuta,}$$

a mala (satna) kazaljka napravi puni krug za 12 sati što je $12 \cdot 60$ minuta, pa kut α pređe za

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 12 \cdot 60 = 2\alpha \quad \text{minuta.} \qquad \text{(6 bodova)}$$

U 13:00 sati mala kazaljka pokazuje na 1, a velika na 12, pa mala kazaljka ima na početku $360^\circ/12 = 30^\circ$ prednosti. Stoga, ako je u trenutku kad kazaljke zatvaraju ispruženi kut velika kazaljka prešla α stupnjeva, onda je mala kazaljka prešla

$$(\alpha - 180^\circ) - 30^\circ = \alpha - 210^\circ. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Vrijeme t proteklo do tog trenutka može se zapisati na dva načina koristeći pređeni kut velike, odnosno male, kazaljke:

$$t = \frac{\alpha}{6} = 2(\alpha - 210^\circ). \qquad \text{(5 bodova)}$$

Rješenje te jednadžbe po α je

$$\alpha = \frac{6 \cdot 420^\circ}{11},$$

pa je

$$t = \frac{\alpha}{6} = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11} \quad \text{minuta.}$$

i kazaljke će zatvarati ispruženi kut u 13 sati i $38\frac{2}{11}$ minuta. (3 boda)

3. Riješi nejednadžbu

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \geqslant 0.$$

Rješenje.

Budući da je $x - 1$ u nazivniku, $x \neq 1$. (2 boda)

Nejednadžbu rješavamo množenjem s nazivnikom, ali pritom moramo razlikovati dva slučaja, ovisno o predznaku izraza s kojim množimo.

Napomena. Učenik koji ne pazi na predznak izraza s kojim množi nejednadžbu može dobiti ukupno najviše 6 bodova.

1° $x - 1 > 0$:

Množenjem nejednadžbe nazivnikom u ovom slučaju neće se promijeniti znak nejednakosti, pa se dobiva

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 \geqslant 0, \qquad \text{(2 boda)}$$

što je ekvivalentno s

$$x^2(x-2)^2 \geqslant 0. \qquad \text{(3 boda)}$$

Lijeva strana nejednadžbe je potpun kvadrat pa je posljednja nejednadžba ispunjena za sve $x \in \mathbb{R}$, (2 boda)

a budući da smo pretpostavili $x > 1$, rješenje ovog slučaja je

$$x \in \langle 1, +\infty\rangle. \qquad \text{(2 boda)}$$

2° $x - 1 < 0$:

Množenjem nejednadžbe s nazivnikom u ovom slučaju znak nejednakosti se mijenja i dobiva se

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 \leqslant 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

što je ekvivalentno s

$$(*) \qquad x^2(x-2)^2 \leqslant 0. \qquad \text{(3 boda)}$$

Lijeva strana nejednadžbe je potpun kvadrat pa je posljednja nejednadžba ispunjena jedino ako

$$x^2(x-2)^2 = 0, \qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno $x = 0$ i $x = 2$.

Ali u ovom slučaju je $x < 1$, pa je rješenje ovog slučaja samo

$$x = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Dakle, rješenje zadane nejednadžbe je

$$x \in \{0\} \cup \langle 1, +\infty\rangle.$$

Napomena. Učenik koji korektno rješava zadatak, ali ipak ispusti $x = 0$ u drugom slučaju (jer tvrdi da $(*)$ nema rješenja), gubi 5 bodova.

4. Odredi znamenku jedinica (zadnju znamenku) umnoška

$$(8-5)(8^2-5^2)(8^3-5^3)\dots(8^{2006}-5^{2006}).$$

Rješenje.
Zadatak ćemo riješiti na dva načina. Uočimo najprije da:

1. sve potencije broja 5 završavaju znamenkom 5, (1 bod)

2. sve potencije broja 8 završavaju redom znamenkama 8, 4, 2, 6 i zatim se periodički ponavljaju. (3 boda)

1. način
Zbog gore navedene činjenice pojedine zagrade umnoška

$$\begin{aligned} 8-5 &= 3, \\ 8^2-5^2 &= 64-25=39, \\ 8^3-5^3 &= 512-125=387, \\ 8^4-5^4 &= 4096-625=3471, \\ 8^5-5^5 &= \overline{\dots 8}-\overline{\dots 5} = \overline{\dots 3}, \\ 8^6-5^6 &= \overline{\dots 4}-\overline{\dots 5} = \overline{\dots 9} \end{aligned}$$

redom završavaju znamenkama 3, 9, 7, 1 i dalje se periodički ponavljaju. (5 bodova)

Budući da je $3\cdot 9\cdot 7\cdot 1=189$, umnožak četiri uzastopne zagrade završava znamenkom 9. Nadalje $9^2=81$, pa umnožak osam uzastopnih zagrada završava znamenkom 1.
(4 boda)

Ostatak pri dijeljenju s 8 broja 2006 (toliko zagrada ima) je 6, pa je dovoljno naći zadnju znamenku umnoška prvih 6 zagrada. Dakle,

$$(3\cdot 9\cdot 7\cdot 1)\cdot 3\cdot 9=\overline{\dots 9}\cdot 3\cdot 9=\overline{\dots 3}$$

i zadnja znamenka je 3. (7 bodova)

2. način
Množenjem zadanih 2006 zagrada 'svaki sa svakim' svi pribrojnici u kojima se javljaju i potencije od 8 i potencije od 5 završavaju nulom jer sadrže barem jedan faktor 2 i barem jedan faktor 5, pa su sigurno djeljivi s 10. (3 boda)

Stoga je zadnja znamenka zadanog umnoška jednaka zadnjoj znamenki zbroja

$$8\cdot 8^2\cdot 8^3\cdot\ldots\cdot 8^{2006}+5\cdot 5^2\cdot 5^3\cdot\ldots\cdot 5^{2006},$$

jer su to jedini pribrojnici koji ne završavaju nulom. (3 boda)

Drugi pribrojnik je potencija broja 5 pa prema gore navedenoj činjenici završava znamenkom 5. Prvi pribrojnik je jednak

$$8^{1+2+3+\ldots+2006}=8^{\frac{2006\cdot 2007}{2}}=8^{2\,013\,021}.$$

Kao u 1. slučaju pokazuje se da $8\cdot 4\cdot 2\cdot 6$ završava znamenkom 1. (5 bodova)

Budući da 2 013 021 pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1, opet zbog gore navedene činjenice, prvi pribrojnik završava znamenkom 8. Nadalje, $8+5=13$ pa je tražena zadnja znamenka 3. (5 bodova)

5. Simetrala hipotenuze pravokutnog trokuta odsijeca trokut čija je površina tri puta manja od površine polaznog trokuta. Odredi šiljaste kutove promatranog trokuta.

Prvo rješenje.
Uz oznake kao na slici uvjet zadatka je

$$P(\triangle ADE) = \frac{1}{3} P(\triangle ABC),$$

odnosno

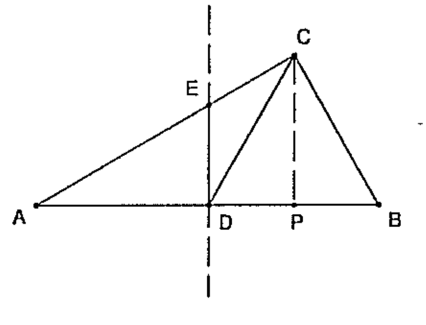
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{2} \cdot |ED| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CP|,$$

iz čega slijedi

$$\frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2}.$$ (5 bodova)

Trokuti $\triangle ADE$ i $\triangle APC$ su slični jer su pravci ED i CP paralelni. Stoga

$$\frac{|AP|}{|AD|} = \frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2}.$$ (5 bodova)



Polovište hipotenuze D pravokutnog trokuta je središte opisane kružnice pa je $|DC| = |DB| = |DA|$, te je zbog gornjeg omjera P polovište dužine DB. (5 bodova)

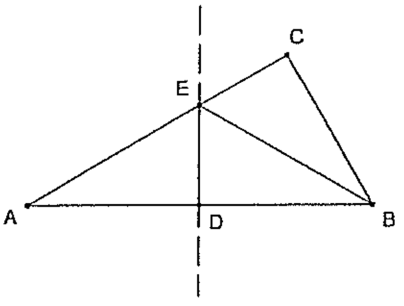
Dakle, trokut $\triangle DBC$ je jednakostraničan pa je kut $\sphericalangle ABC = 60°$. Slijedi da je $\sphericalangle BAC = 30°$. (5 bodova)

Drugo rješenje.
Koristimo oznake kao na drugoj slici.
Kako je D polovište hipotenuze, trokuti ADE i BDE su sukladni, pa zbog uvjeta zadatka, ta dva trokuta i trokut BCE imaju jednake površine. (5 bodova)

Zato je $P(BCE) = \frac{1}{3}P(ABC)$, pa je $|CE| = \frac{1}{3}|CA|$ (visine na zajedničku stranicu $\overline{BC}$), odnosno $|AE| = 2|CE|$. (4 boda)

Kako je $|AE| = |BE|$, zaključujemo da u pravokutnom trokutu BCE vrijedi $|BE| = 2|CE|$, (3 boda)

pa su šiljasti kutovi tog trokuta $\sphericalangle BEC = 60°$ i $\sphericalangle EBC = 30°$. (3 boda)



Dalje je lako. Npr.,

$$\begin{aligned}
\sphericalangle AEB &= 180° - \sphericalangle CEB = 120°, \\
\sphericalangle CAB &= \sphericalangle EAB = \sphericalangle EAB = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle AEB) = 30°, \\
\sphericalangle ABC &= 90° - \sphericalangle CAB = 60°.
\end{aligned}$$

Kutovi danog trokuta su 30°, 60° i 90°. (5 bodova)

Treće rješenje.
Koristimo oznake kao na drugoj slici.
Trokuti ABC i AED su slični. Trokuti AED i BED su sukladni, pa je $P(\triangle AED) = \frac{1}{3}P(\triangle ABC)$. Zato je koeficijent sličnosti $k = \frac{|AC|}{|AD|} = \sqrt{3}$. (4 bodova)

Iz $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$ slijedi

$$(\sqrt{3}|AD|)^2 + (\sqrt{3}|ED|^2) = (2|AD|)^2 \quad \text{tj.} \quad |AD|^2 = 3|ED|^2. \qquad \text{(3 boda)}$$

Odavde je $|AE|^2 = |AD|^2 + |ED|^2 = 4|ED|^2$, tj. $|AE| = 2|ED|$. (5 bodova)

Trokut ADE je pola jednakostraničnog trokuta, pa je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EAD = 30°$. (3 boda)

Kako je $\sphericalangle BCA = 90°$, $\sphericalangle ABC = 90° - \sphericalangle CAB = 60°$. (5 bodova)