MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, Županijsko natjecanje
Zadaci za **II. razred** srednje škole, **A varijanta**
14. ožujka 2006.

1. Dokaži da je za svaki prirodan broj n, broj

$$\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$$

također prirodan.

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$z \cdot |z| + 2z + i = 0\,.$$

3. Dvije kružnice jednakog polumjera ϱ upisane su u trokut ABC tako da se međusobno dodiruju, te jedna od njih dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a druga stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{2}{|AB|}=\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{r}\,,$$

gdje je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva a i b za koje je

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$

racionalan broj.

5. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $ab+bc+ca=1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\,.$$

Županijsko natjecanje 2006., II. razred, A varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Dokaži da je za svaki prirodan broj n, broj

$$\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$$

također prirodan.

Rješenje.
Imamo:

$$\begin{aligned}\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4} &= \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}\\ =\frac{n(n^3+6n^2+11n+6)}{24} &= \frac{n(n^3+n^2+5n^2+5n+6n+6)}{24}\\ =\frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{24} &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.\end{aligned}$$

Brojnik $A=n(n+1)(n+2)(n+3)$ je produkt četiri uzastopna prirodna broja.

(5 bodova)

Od četiri uzastopna prirodna broja dva su djeljiva s 2, a jedan od njih s 4. To znači da je A djeljivo s 8.

(8 bodova)

Napomena. Ako učenik obrazloži da $4|A$, ali ne i $8|A$, onda 3 boda.

Od tri uzastopna prirodna broja jedan je djeljiv s 3. (5 bodova)

Dakle, A je djeljiv s 8 i s 3 tj. A je djeljiv s $8\cdot 3=24$. (2 boda)

Napomena. Moguće je i metodom matematčke indukcije dokazati $24\,|\,n(n+1)(n+2)(n+3)$.

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$z\cdot|z|+2z+i=0\,.$$

Prvo rješenje.
Neka je $z=x+iy$. Tada jednadžba poprima oblik

$$(x+iy)\sqrt{x^2+y^2}+2x+2iy+i=0,$$

ili

$$x(\sqrt{x^2+y^2}+2)+i(y\sqrt{x^2+y^2}+2y+1)=0.$$

(4 boda)

Odavde dobivamo:

$$x(\sqrt{x^2+y^2}+2)=0, \tag{1}$$

$$y\sqrt{x^2+y^2}+2y+1=0. \tag{2}$$

(2 boda)

Kako je $\sqrt{x^2+y^2}+2>0$ iz (1) slijedi $x=0$, (4 boda)

pa iz (2) dobivamo

$$y|y|+2y+1=0.$$

Odavde je $y<0$ i $y^2-2y-1=0$. (4 boda)

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Zbog $y<0$ zadovoljava samo $y=1-\sqrt{2}$. (4 boda)

Dakle, jedino rješenje je $z=i(1-\sqrt{2})$. (2 boda)

Drugo rješenje. Zapišimo jednadžbu u obliku

$$z(|z|+2)=-i.$$

Odavde se dobiva $|z|+2=-\frac{i}{z}$, odnosno, $|z|+2=\frac{1}{|z|}$ (7 bodova)

Supstitucijom $r=|z|$ posljednja jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu po r

$$r^2+2r-1=0,$$

čija rješenja su $-1\pm\sqrt{2}$. Radi $r>0$ zadovoljava samo $r=-1+\sqrt{2}$. (8 bodova)

Sada iz $z(-1+\sqrt{2}+2)=-i$ dobivamo

$$z=-\frac{i}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=(1-\sqrt{2})i$$

(5 bodova)

Napomene.

— Učenik koji rješava jednadžbe

$$z^2+2z+i=0 \qquad \text{i} \qquad -z^2+2z+i=0$$

dobiva 0 bodova.

— Tko ima $z_{1,2}=i(1\pm\sqrt{2})$ gubi 5 bodova.

3. Dvije kružnice jednakog polumjera ϱ upisane su u trokut ABC tako da se međusobno dodiruju, te jedna od njih dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a druga stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{2}{|AB|} = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r},$$

gdje je r polumjer upisane kružnice trokuta ABC.

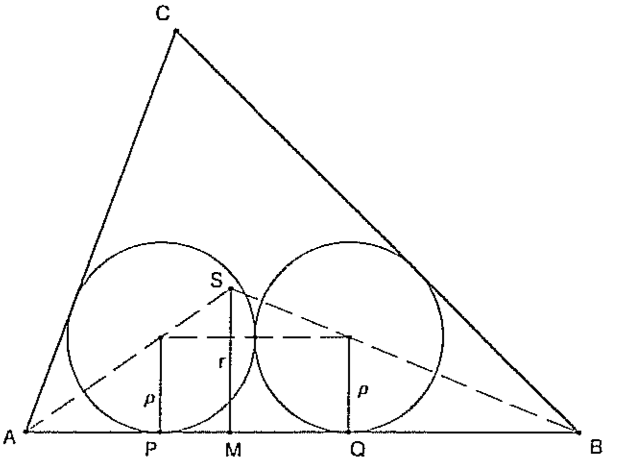
Rješenje.

Uvedimo oznake kao na slici (S je središte upisane kružnice). Iz sličnosti trokuta dobiva se:

$$|AP| : |AM| = \varrho : r, \qquad \text{(5 bodova)}$$

$$|BQ| : |BM| = \varrho : r. \qquad \text{(3 bodova)}$$

Napomena. Jedan omjer 5 bodova, dva omjera 8 bodova.



Kako je

$$|AP| + |PQ| + |QB| = |AB| \qquad \text{(2 boda)}$$

slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{\varrho}{r}|AM| + 2\varrho + \frac{\varrho}{r}|BM| &= |AB| && \text{(2 bodova)}\\
\frac{\varrho}{r}(|AM| + |BM|) + 2\varrho &= |AB|, \\
\frac{\varrho}{r}(|AB|) + 2\varrho &= |AB|, \\
2\varrho &= \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)|AB| \quad / : (\varrho \cdot |AB|) && \text{(6 bodova)}\\
\frac{2}{|AB|} &= \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva a i b za koje je

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$

racionalan broj.

Rješenje.
Neka je q racionalan broj takav da je

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}=q.$$

Jednakost se može zapisati u ovom obliku

$$\sqrt{a}-q\sqrt{b}=q\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$ (2 boda)

Nakon kvadriranja dobiva se

$$\begin{aligned} a+q^2b-2q\sqrt{ab} &= 3q^2+2-2q\sqrt{6}, \\ 2q(\sqrt{ab}-\sqrt{6}) &= a+q^2(b-3)-2. \end{aligned}$$

(2 boda)

Odavde slijedi da je $\sqrt{ab}-\sqrt{6}=q_1$ racionalan broj. (4 bodova)

Nakon kvadriranja jednakosti $\sqrt{ab}=\sqrt{6}+q_1$, dobiva se $ab=6+q_1^2+2q_1\sqrt{6}$, ili zapisano u ekvivalentnom obliku $2q_1\sqrt{6}=ab-6-q_1^2$. Posljednja jednakost može vrijediti samo ako je $q_1=0$. (7 bodova)

Tada je $ab=6$, pa preostaje provjeriti sljedeća četiri slučaja:

$$a=1,\ b=6 \quad\Rightarrow\quad q=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{iracionalan broj},$$

$$a=2,\ b=3 \quad\Rightarrow\quad q=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \text{iracionalan broj},$$

$$a=3,\ b=2 \quad\Rightarrow\quad q=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1,\ \text{racionalan broj},$$

$$a=6,\ b=1 \quad\Rightarrow\quad q=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{2},\ \text{iracionalan broj}.$$

Dakle, racionalan broj se dobiva samo za $a=3$, $b=2$. (5 bodova)

Napomena. Učenik koji uoči da je $a=3$, $b=2$ jedno rješenje, ali ne pokazuje da drugih nema, dobiva 3 boda.

5. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $ab + bc + ca = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Rješenje.

Dana nejednakost je redom ekvivalentna sa sljedećima:

$$\begin{aligned}
\frac{1-ab}{a+b} + \frac{1-bc}{b+c} + \frac{1-ca}{c+a} &\geq \sqrt{3}, \\
\frac{bc+ca}{a+b} + \frac{ca+ab}{b+c} + \frac{ab+bc}{c+a} &\geq \sqrt{3}, \\
a+b+c &\geq \sqrt{3}, \quad /^2 && \text{(5 bodova)} \\
a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) &\geq 3, \\
a^2+b^2+c^2+2\cdot 1 &\geq 3, && \text{(5 bodova)} \\
a^2+b^2+c^2 &\geq 1, \\
a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca, \\
\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] &\geq 0. && \text{(10 bodova)}
\end{aligned}$$

Kako je ova nejednakost ispunjena, vrijedi i polazna.