MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, Županijsko natjecanje

Zadaci za **II. razred** srednje škole, **B varijanta**

14. ožujka 2006.

1. Neka su x, y i a realni brojevi takvi da je $x+y=a-1$ i $xy=a^2-7a+12$. Za koji a izraz x^2+y^2 poprima najveću moguću vrijednost? Koliki su tada x i y?

2. Odredi realne brojeve a i b za koje je polinom ax^3+bx+2 djeljiv sa $(x-1)^2$.

3. Dokaži da je za svaki prirodan broj n, broj
$$\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$$
također prirodan.

4. U jednakostraničnom trokutu zadana je točka T čije udaljenosti od stranica trokuta iznose 1, 2 i 3. Kolika je duljina stranice tog trokuta?

5. Da li je broj
$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$
racionalan? Obrazloži!

Županijsko natjecanje 2006., II. razred, B varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Neka su x, y i a realni brojevi takvi da je $x+y=a-1$ i $xy=a^2-7a+12$. Za koji a izraz x^2+y^2 poprima najveću moguću vrijednost? Koliki su tada x i y?

Rješenje.
Promatrani izraz x^2+y^2 izražavamo pomoću a:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= (a-1)^2-2(a^2-7a+12) \\ &= -a^2+12a-23. \end{aligned}$$

(5 bodova)

Kvadratni izraz $-a^2+12a-23$ poprima najveću vrijednost za $a=\frac{-12}{2\cdot(-1)}=6$. Tada je $x^2+y^2=-36+72-23=13$. (10 bodova)

Odredimo sada brojeve x i y. Iz uvjeta dobivamo: $x+y=5$ i $xy=6$. Traženi brojevi su rješenja kvadratne jednadžbe $t^2-5t+6=0$, odakle slijedi $x=2$ i $y=3$ ili $x=3$ i $y=2$.

(5 bodova)

Napomena. Zbroj čiji maksimum treba odrediti može se i odrediti i na ovaj način.
Iz $y=(a-1)-x$ slijedi

$$\begin{aligned} x((a-1)-x) &= a^2-7a+12, \qquad \text{tj.} \\ x^2-(a-1)x+a^2-7a+12 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su izrazi za x i y, tj.

$$x=\frac{a-1\pm\sqrt{-3a^2+26-47}}{2}, \qquad y=\frac{a-1\mp\sqrt{-3a^2+26-47}}{2}.$$

Sada se dobije $x^2+y^2=-a^2+12a-23$.

2. Odredi realne brojeve a i b za koje je polinom ax^3+bx+2 djeljiv sa $(x-1)^2$.

Prvo rješenje.
Dijeljenjem:

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & (ax^3 & & + & bx & + & 2) & : (x^2-2x+1) = ax+2a \\ \pm & ax^3 & \mp\ 2ax^2 & \pm & ax & & & \\ \hline & & 2ax^2 & + & (b-a)x & + & 2 & \\ & \pm & 2ax^2 & \mp & 4ax & \pm & 2a & \\ \hline & & & & (3a+b)x & + & (-2a+2) & \end{array}$$

se dobiva ostatak $(3a+b)x+(-2a+2)$ (10 bodova)

Polinom $p(x) = ax^3 + bx + 2$ je djeljiv s $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ ako i samo ako je ostatak dijeljenja polinoma $p(x)$ s $(x-1)^2$ jednak nuli, pa mora biti $3a + b = 0$ i $-2a + 2 = 0$.

(5 bodova)

Rješavanjem ovog sustava dobivamo $a = 1$, $b = -3$. (5 bodova)

Napomena. Da bi $P(x)$ bio djeljiv s $(x-1)^2$ mora biti $P(1) = 0$ i $P'(1) = 0$, pa dobivamo $a + b + 2 = 0$, $3a + b = 0$, odakle slijedi $a = 1$, $b = -3$.

Drugo rješenje.
Prikazat ćemo polinom $p(x) = ax^3 + bx + 2$ po potencijama od $(x-1)$.

$$\begin{aligned}
ax^3 + bx + 2 &= a[(x-1)+1]^3 + b[(x-1)+1] + 2 \\
&= a(x-1)^3 + 3a(x-1)^2 + 3a(x-1) + a + b(x-1) + b + 2 \\
&= a(x-1)^3 + 3a(x-1)^2 + (3a+b)(x-1) + (a+b+2)
\end{aligned}$$

(10 bodova)

je djeljivo s $(x-1)^2$ ako i samo ako je $3a + b = 0$ i $a + b + 2 = 0$. (5 bodova)

Rješenje ovog sustava dobivamo $a = 1$ i $b = -3$. (5 bodova)

3. Dokaži da je za svaki prirodan broj n, broj

$$\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4}$$

također prirodan.

Rješenje.
Imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4} &= \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{24} \\
= \frac{n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)}{24} &= \frac{n(n^3 + n^2 + 5n^2 + 5n + 6n + 6)}{24} \\
= \frac{n(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{24} &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.
\end{aligned}$$

Brojnik $A = n(n+1)(n+2)(n+3)$ je produkt četiri uzastopna prirodna broja.

(5 bodova)

Od četiri uzastopna prirodna broja dva su djeljiva s 2, a jedan od njih s 4. To znači da je A djeljivo s 8. (8 bodova)

Napomena. Ako učenik obrazloži da $4|A$, ali ne i $8|A$, onda 3 boda.

Od tri uzastopna prirodna broja jedan je djeljiv s 3. (5 bodova)

Dakle, A je djeljiv s 8 i s 3 tj. A je djeljiv s $8 \cdot 3 = 24$. (2 boda)

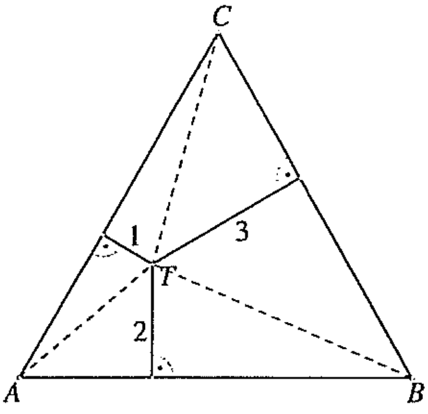
Napomena. Moguće je i metodom matematčke indukcije dokazati $24 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$.

4. U jednakostraničnom trokutu zadana je točka T čije udaljenosti od stranica trokuta iznose 1, 2 i 3. Kolika je duljina stranice tog trokuta?

Rješenje.
Vidimo da trokut ABC možemo razdijeliti na tri trokuta CAT, ABT i BCT. Površina trokuta ABC jednaka je zbroju površina ta tri trokuta:

$$P(ABC) = P(CAT) + P(ABT) + P(BCT).$$

(5 bodova)



Površina trokuta CAT jednaka je $\frac{1}{2}|CA| \cdot v_b$. Pritom je v_b, duljina visine tog trokuta iz vrha T, upravo udaljenost točke T od stranice $\overline{CA}$. (5 bodova)

Zato je (vidi sliku) $P(CAT) = \dfrac{a \cdot 1}{2}$, (2 boda)

i analogno $P(ABT) = \dfrac{a \cdot 2}{2}$, $P(BCT) = \dfrac{a \cdot 3}{2}$, (3 boda)

pa dobivamo $\dfrac{a \cdot 1}{2} + \dfrac{a \cdot 2}{2} + \dfrac{a \cdot 3}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a odatle konačno $3a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $a = 4\sqrt{3}$.
(5 bodova)

5. Da li je broj

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$$

racionalan? Obrazloži!

Rješenje.
Danu sumu možemo zapisati u obliku

$$A=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\cdot\sqrt{99}+99\cdot\sqrt{100}}.$$

Opći član, počevši od drugog, je

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n^3+2n^2+n-n^3-n^2}\\ &= \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

(15 bodova)

Sada je

$$\begin{aligned}A &= 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}}-\frac{1}{\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\\ &= 1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Dakle, dani broj je racionalan. (5 bodova)

Napomena. Učenik može raspisati nekoliko prvih članova u zbroju i uočiti danu pravilnost.