MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, Županijsko natjecanje
Zadaci za **III. razred** srednje škole, **A varijanta**
14. ožujka 2006.

1. Za duljine a, b kateta pravokutnog trokuta vrijedi

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b - \log 2).$$

Odredi šiljaste kutove tog trokuta.

2. U trokutu ABC vrijedi: $|BC| = 4$, $|CA| = 5$, $\sphericalangle BCA = 2\sphericalangle CAB$.
Izračunaj polumjere tom trokutu opisane i upisane kružnice.

3. Odredi sve parove realnih brojeva x, y iz intervala $[0, 2\pi]$ za koje vrijedi

$$\sin x - \sin y + \cos(x-y) = \frac{3}{2}.$$

4. Neka je R polumjer kugle opisane oko pravilne četverostrane piramide, a r polumjer kugle upisane u tu piramidu. Dokaži da je

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1.$$

5. U Sunčevom sustavu otkriven je novi planet! Dakle, oko Sunca kruži 10 planeta. Dokaži da se u svakom trenutku na površini Sunca može pronaći točka iz koje su vidljiva najviše 4 planeta.
(Općepoznata pretpostavka je da svi planeti i Sunce imaju oblik kugle te da svaki planet ima manji polumjer od Sunca. Druga saznanja o planetama molimo ne koristiti.)

Županijsko natjecanje 2006., 3. razred, A kategorija
Zadaci i rješenja:

1. Za duljine a, b kateta pravokutnog trokuta vrijedi

$$\log\frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b - \log 2).$$

Odredi šiljaste kutove tog trokuta.

Rješenje.
Jednakost

$$2\log\frac{a-b}{2} = \log a + \log b - \log 2$$

možemo zapisati u obliku

$$\log\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \log\frac{ab}{2}, \qquad \text{(3 boda)}$$

tj.

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{ab}{2}, \qquad \text{(2 boda)}$$

odakle množenjem slijedi

$$a^2 + b^2 = 4ab.$$

Sada se sjetimo da se radi o pravokutnom trokutu pa je $a^2 + b^2 = c^2$, (2 boda)
odakle dobivamo

$$c^2 = 4ab.$$

Nadalje, zbog $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, je

$$4ab = 4\cdot c\sin\alpha\cdot c\cos\alpha = 4c^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

pa možemo posljednju jednakost zapisati u obliku

$$4\sin\alpha\cos\alpha = 1, \qquad \text{(5 bodova)}$$

tj.

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Slijedi $2\alpha = 30^\circ$ ili $2\alpha = 150^\circ$, tj. $\alpha = 15^\circ$ ili $\alpha = 75^\circ$. (3 boda)

Budući da mora biti $\frac{a-b}{2} > 0$ (kako bi logaritam s početka zadatka bio definiran), zaključujemo $a > b$, tj. $\alpha > \beta = 90^\circ - \alpha$, pa dolazi u obzir jedino rješenje

$$\alpha = 75^\circ,\ \beta = 15^\circ. \qquad \text{(5 bodova)}$$

2. U trokutu ABC vrijedi: $|BC| = 4$, $|CA| = 5$, $\measuredangle BCA = 2\measuredangle CAB$.
Izračunaj polumjere tom trokutu opisane i upisane kružnice.

Rješenje.

Uvjete možemo standardno zapisati $a = 4$, $b = 5$, $\gamma = 2\alpha$.

Prema poučku o sinusima imamo

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$$

pa je $\cos\alpha = \frac{c}{8}$. S druge strane, poučak o kosinusima daje

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2+9}{10c}$$

pa uspoređivanjem dobivamo jednadžbu

$$\frac{c}{8} = \frac{c^2+9}{10c},$$

odakle je $c = 6$. (10 bodova)

Sada je $\cos\alpha = \frac{c}{8} = \frac{3}{4}$, što daje $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Iz formule $a = 2R\sin\alpha$ možemo izračunati radijus opisane kružnice R.

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$ (5 bodova)

Površina trokuta je jednaka $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$, a poluopseg mu je jednak $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+5+6}{2} = \frac{15}{2}$ pa konačno možemo izračunati i radijus upisane kružnice.

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{15\sqrt{7}}{4}}{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$ (5 bodova)

3. Odredi sve parove realnih brojeva x, y iz intervala $[0, 2\pi]$ za koje vrijedi

$$\sin x - \sin y + \cos(x-y) = \frac{3}{2}.$$

Rješenje.

Korištenjem formula $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ te $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ jednadžbu možemo transformirati ovako:

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{x-y}{2} = \frac{3}{2}\\
\Leftrightarrow\ &\sin^2\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} + \frac{1}{4} = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left(\sin\frac{x-y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \cos^2\frac{x+y}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

(5 bodova)

Oba pribrojnika su nenegativna, a zbroj im je 0, pa mora biti

$$\begin{aligned} 1-\cos^2\frac{x+y}{2} &= 0, \\ \sin\frac{x-y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x+y}{2} &= 0. \end{aligned}$$

(5 bodova)

Razlikujemo dva slučaja:

(i) $\cos\frac{x+y}{2}=1$, $\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}$
Zbog $0\le\frac{x+y}{2}\le 2\pi$ i $\cos\frac{x+y}{2}=1$ bi moralo biti $x=y=0$ ili $x=y=2\pi$, što je u kontradikciji s drugom jednadžbom.

(ii) $\cos\frac{x+y}{2}=-1$, $\sin\frac{x-y}{2}=-\frac{1}{2}$
Zbog $0\le\frac{x+y}{2}\le 2\pi$ i $\cos\frac{x+y}{2}=-1$ mora biti $\frac{x+y}{2}=\pi$, tj. $y=2\pi-x$. Uvrštavanje u drugu jednadžbu daje $\sin(x-\pi)=-\frac{1}{2}$, tj. $\sin x=\frac{1}{2}$. Dobivamo rješenja

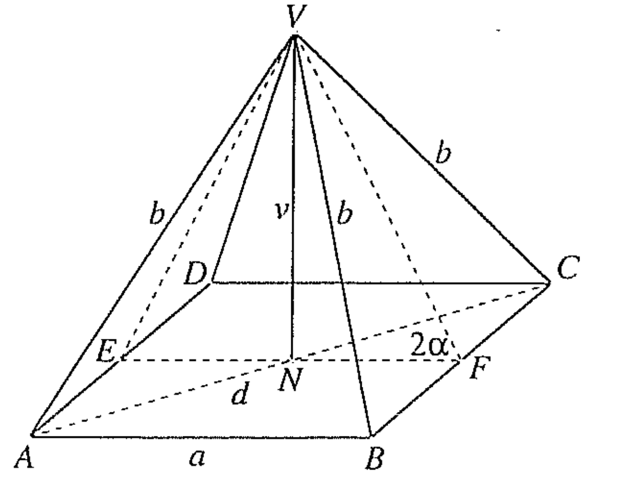
$$x=\frac{\pi}{6},\ y=\frac{11\pi}{6} \qquad \text{te} \qquad x=\frac{11\pi}{6},\ y=\frac{\pi}{6}.$$

(10 bodova)

4. Neka je R polumjer kugle opisane oko pravilne četverostrane piramide, a r polumjer kugle upisane u tu piramidu. Dokaži da je

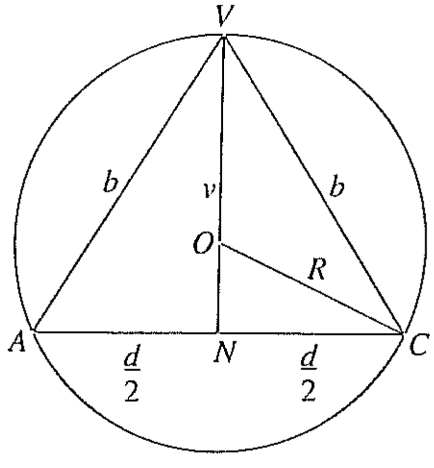
$$\frac{R}{r}\ge\sqrt{2}+1.$$

Rješenje.
Neka su točke, duljine i kut α kao na slici.



Iz trokuta FVN dobivamo $v=\frac{1}{2}a\operatorname{tg}2\alpha$, a iz trokuta VAN dobivamo $b^2=v^2+\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}a^2(\operatorname{tg}^2 2\alpha+2)$.

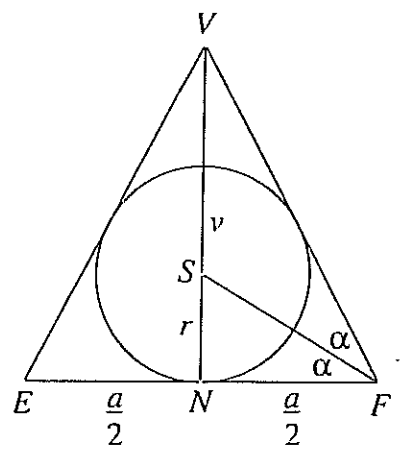
(5 bodova)



Pošto je R jednak polumjeru trokutu ACV opisane kružnice, imamo

$$R = \frac{d \cdot b \cdot b}{4P(ACV)} = \frac{db^2}{2dv} = \frac{b^2}{2v} = \frac{a(\operatorname{tg}^2 2\alpha + 2)}{4 \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

(5 bodova)



Pošto je r jednak polumjeru trokutu EFV upisane kružnice, imamo $r = \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \alpha$ pa je konačno

$$\frac{R}{r} = \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha + 2}{2 \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^4 \alpha + 1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}.$$

(5 bodova)

Uz oznaku $t = \operatorname{tg}^2 \alpha \in \langle \operatorname{tg}^2 0^\circ, \operatorname{tg}^2 45^\circ \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ preostaje dokazati da za $t \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi

$$\frac{t^2 + 1}{2t(1 - t)} \geq \sqrt{2} + 1,$$

odnosno nakon množenja

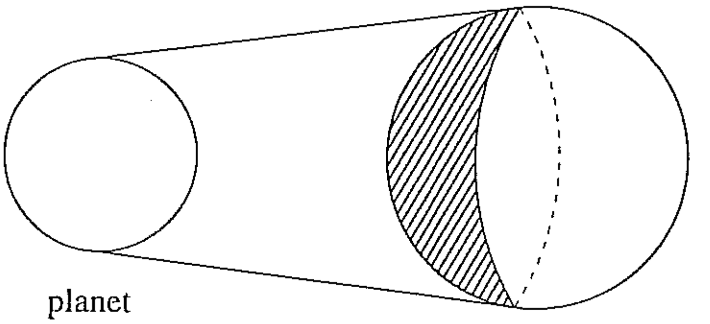
$$(2\sqrt{2} + 3)t^2 - 2(\sqrt{2} + 1)t + 1 \geq 0,$$

no ova kvadratna nejednadžba ima vodeći koeficijent pozitivan i diskriminantu

$$4(\sqrt{2}+1)^2 - 4(2\sqrt{2}+3) = 0$$

pa je zadovoljena za svaki realni broj t. (5 bodova)

5. U Sunčevom sustavu otkriven je novi planet! Dakle, oko Sunca kruži 10 planeta. Dokaži da se u svakom trenutku na površini Sunca može pronaći točka iz koje su vidljiva najviše 4 planeta.
(Općepoznata pretpostavka je da svi planeti i Sunce imaju oblik kugle te da svaki planet ima manji polumjer od Sunca. Druga saznanja o planetima ne smiju se koristiti.)
Rješenje.



Za svaki planet promotrimo skup svih točaka na površini Sunca iz kojih ga je moguće vidjeti. To je sferna kapica čija površina je manja od $\frac{1}{2}P$, gdje je sa P označen iznos Sunčeve površine (kao površine sfere). Zbroj površina svih tih kapica je manji od $10 \cdot \frac{1}{2}P = 5P$. (10 bodova)

S druge strane, kad bi se iz svake točke na Suncu vidjelo barem 5 planeta, onda bi te sferne kapice 5 puta prekrivale Sunčevu površinu pa bi zbroj njihovih površina bio barem $5P$. Kontradikcija. (10 bodova)