MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, Županijsko natjecanje
Zadaci za **III. razred** srednje škole, **B varijanta**
14. ožujka 2006.

1. Ako su x, y, a, b realni brojevi za koje vrijedi

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} a, \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} b, \quad x + y = \frac{\pi}{4},$$

izračunaj $\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} b$.

2. Za duljine a, b kateta pravokutnog trokuta vrijedi

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} (\log a + \log b - \log 2).$$

Odredi šiljaste kutove tog trokuta.

3. Unutar trokuta ABC nalazi se točka P takva da vrijedi

$$\sphericalangle PAC = 40^\circ, \ \sphericalangle PCA = 70^\circ, \ \sphericalangle PBC = 20^\circ, \ \sphericalangle PCB = 10^\circ.$$

Odredi kutove trokuta ABC.

4. Dvije piramide imaju zajedničku bazu – kvadrat sa stranicom duljine a. Obje piramide su s iste strane kvadrata, visine im imaju jednaku duljinu b, a nožišta njihovih visina su u polovištima suprotnih stranica kvadrata. Izračunaj volumen zajedničkog dijela tih dviju piramida.

5. U kutiji se nalazi 100 kockica, čije su sve strane obojene crvenom, zelenom ili žutom bojom. Među njima 75 kockica ima barem jednu crvenu stranu, 80 kockica ima barem jednu zelenu stranu, a 85 kockica ima barem jednu žutu stranu. Koliki je najmanji mogući broj kockica koje imaju strane svih triju boja?

Županijsko natjecanje 2006., 3. razred, B kategorija
Zadaci i rješenja:

1. Ako su x, y, a, b realni brojevi za koje vrijedi

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} a, \quad \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} b, \quad x + y = \frac{\pi}{4},$$

izračunaj $\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} b$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} b &= \frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} - \frac{1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y} = \frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} - \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x+y)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = 1\end{aligned}$$

(20 bodova)

2. Za duljine a, b kateta pravokutnog trokuta vrijedi

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} (\log a + \log b - \log 2).$$

Odredi šiljaste kutove tog trokuta.

Rješenje.
Jednakost

$$2 \log \frac{a-b}{2} = \log a + \log b - \log 2$$

možemo zapisati u obliku

$$\log \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \log \frac{ab}{2}, \quad \text{tj.}$$ (3 boda)

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{ab}{2},$$ (2 boda)

odakle množenjem slijedi

$$a^2 + b^2 = 4ab.$$

Sada se sjetimo da se radi o pravokutnom trokutu, pa je $a^2 + b^2 = c^2$, (2 boda)
odakle dobivamo $c^2 = 4ab$. Nadalje, zbog $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, je

$$4ab = 4 \cdot c \sin \alpha \cdot c \cos \alpha = 4c^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

pa možemo posljednju jednakost zapisati u obliku

$$4 \sin \alpha \cos \alpha = 1,$$ (5 bodova)

$$\text{tj.} \qquad \sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

Slijedi $2\alpha = 30^\circ$ ili $2\alpha = 150^\circ$, tj. $\alpha = 15^\circ$ ili $\alpha = 75^\circ$. (3 boda)

Budući da mora biti $\frac{a-b}{2} > 0$ (kako bi logaritam s početka zadatka bio definiran), zaključujemo $a > b$, tj. $\alpha > \beta = 90^\circ - \alpha$, pa dolazi u obzir jedino rješenje

$$\alpha = 75^\circ,\ \beta = 15^\circ.$$

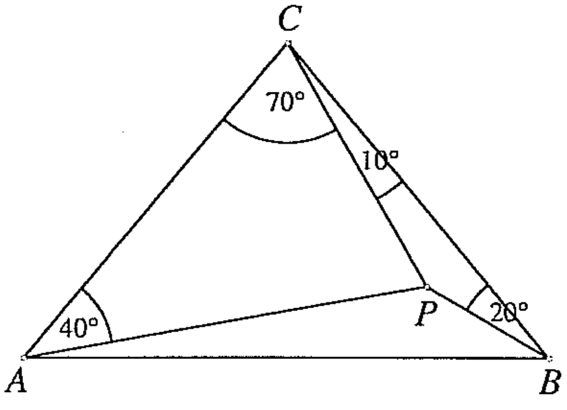
(5 bodova)

3. Unutar trokuta ABC nalazi se točka P takva da vrijedi

$$\sphericalangle PAC = 40^\circ,\ \sphericalangle PCA = 70^\circ,\ \sphericalangle PBC = 20^\circ,\ \sphericalangle PCB = 10^\circ.$$

Odredi kutove trokuta ABC.

Rješenje.



Kako je $\sphericalangle BPC = 150^\circ$ $\sphericalangle APC = 70^\circ$, korištenjem poučka o sinusima za trokute BCP i ACP dobivamo

$$\frac{|BC|}{|CP|} = \frac{\sin \sphericalangle BPC}{\sin \sphericalangle PBC} = \frac{\sin 150^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{2\sin 20^\circ},$$

(5 bodova)

$$\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{\sin \sphericalangle APC}{\sin \sphericalangle PAC} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\frac{\sin 140^\circ}{2\cos 70^\circ}}{\sin 40^\circ} = \frac{\frac{\sin 40^\circ}{2\sin 20^\circ}}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{2\sin 20^\circ}$$

(5 bodova)

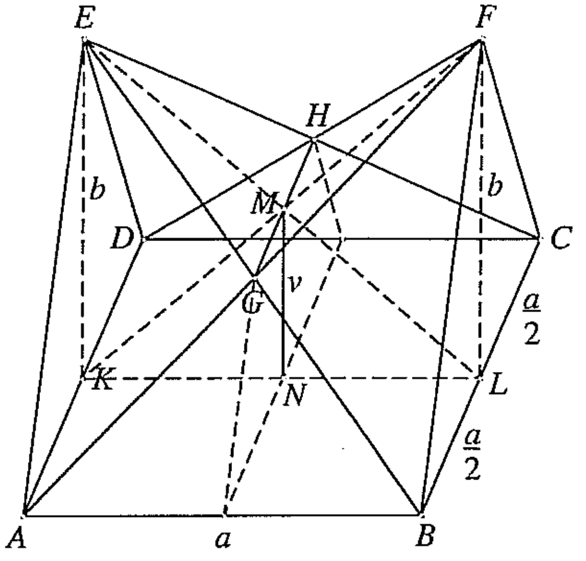
Dakle, $|BC| = |AC|$, tj. trokut ABC je jednakokračan, pa je

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 50^\circ,\quad \sphericalangle ACB = 80^\circ.$$

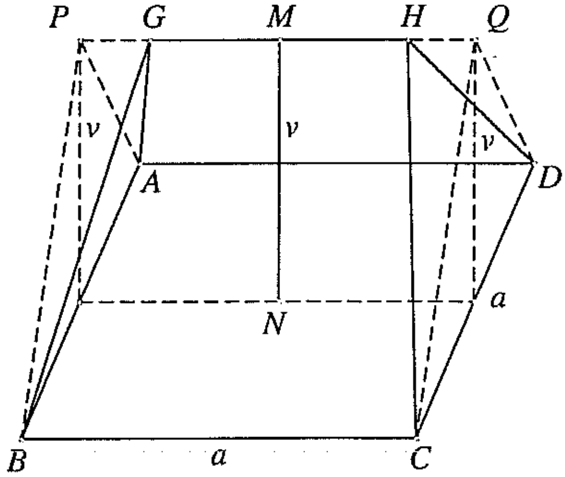
(10 bodova)

4. Dvije piramide imaju zajedničku bazu – kvadrat sa stranicom duljine a. Obje piramide su s iste strane kvadrata, visine im imaju jednaku duljinu b, a nožišta njihovih visina su u polovištima suprotnih stranica kvadrata. Izračunaj volumen zajedničkog dijela tih dviju piramida.

Rješenje.
Neka su točke i duljine označene kao na slici.



Presjek danih piramida je tijelo $ABCDGH$.
Iz sličnosti trokuta KLE i KLM slijedi $\frac{a}{b} = \frac{a/2}{v}$ pa je visina presjeka $v = \frac{b}{2}$. Nadalje, iz sličnosti trokuta GHE i BCE slijedi $\frac{|GH|}{a} = \frac{|EM|}{|EL|} = \frac{1}{2}$ pa je $|GH| = \frac{a}{2}$. (10 bodova)
Nadopunimo presjek piramida $BAGCDH$ do prizme $BAPCDQ$, kako je prikazano na donjoj slici.



Imamo $|PG| = |HQ| = \frac{a}{4}$. Volumen presjeka računamo tako da od volumena prizme $BAPCDQ$ oduzmemo volumene piramida $BAPG$ i $CDQH$.

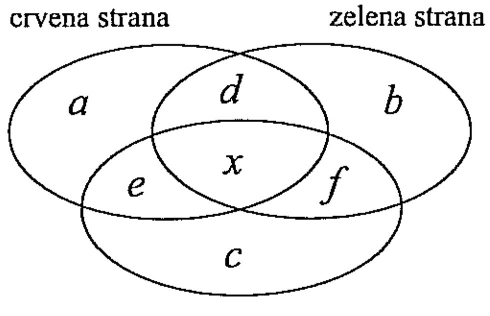
$$V = \frac{av}{2} \cdot a - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{av}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{5a^2b}{24} \qquad \text{10 bodova}$$

5. U kutiji se nalazi 100 kockica, čije su sve strane obojene crvenom, zelenom ili žutom bojom. Među njima 75 kockica ima barem jednu crvenu stranu, 80 kockica ima barem jednu zelenu stranu, a 85 kockica ima barem jednu žutu stranu. Koliki je najmanji mogući broj kockica koje imaju strane svih triju boja?

Rješenje.
Označimo:

$a =$ broj kockica čije sve strane su crvene
$b =$ broj kockica čije sve strane su zelene
$c =$ broj kockica čije sve strane su žute
$d =$ broj kockica koje imaju samo crvene i zelene strane
$e =$ broj kockica koje imaju samo crvene i žute strane
$f =$ broj kockica koje imaju samo zelene i žute strane
$x =$ broj kockica koje imaju strane svih boja

Ove oznake možemo preglednije prikazati Vennovim dijagramom.



(5 bodova)

Iz teksta zadatka možemo pročitati sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + a + d + e &= 75 \\ x + b + d + f &= 80 \\ x + c + e + f &= 85 \\ x + a + b + c + d + e + f &= 100 \end{aligned}$$

(5 bodova)

Zbrojimo prve tri jednadžbe i oduzmimo im dvostruku četvrtu jednadžbu. Dobit ćemo:

$$x - (a + b + c) = 40,$$

odakle je jasno da mora biti $x \geq 40$. (5 bodova)

Najmanji mogući broj kockica koje imaju strane svih triju boja je $x = 40$ i on se postiže kada je

$$a = b = c = 0, \quad d = 15, \quad e = 20, \quad f = 25.$$

(5 bodova)