MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, Županijsko natjecanje
Zadaci za **IV. razred** srednje škole, **A varijanta**
14. ožujka 2006.

1. Za realan broj x definiraju se: najveće cijelo od x, $\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x i decimalni dio od x, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

   Npr. $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\{3.14\} = 0.14$, $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$, $\{-2.4\} = 0.6$.

   Odredi sve pozitivne brojeve x za kojeg su $\{x\}$, $\lfloor x \rfloor$ i x tri uzastopna člana geometrijskog niza.

2. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je polinom $(x+1)^n - x^n - 1$ djeljiv s x^2+x+1.

3. Neka kružnica polumjera r siječe hiperbolu $xy = 1$ u četiri točke $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$. Dokaži da vrijedi:

   (a) $x_1 x_2 x_3 x_4 = y_1 y_2 y_3 y_4 = 1$,

   (b) $\sum_{k=1}^{4} |OP_k|^2 = 4r^2$ (O je ishodište koordinatnog sustava).

4. U skupu realnih brojeva riješi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} &= 2\,, \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} &= 2\,, \\ x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} &= 2\,. \end{aligned}$$

5. Unutar kruga polumjera 1 nalazi se n različitih točaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$. Za $i = 1, 2, \ldots, n$ neka d_i označava udaljenost od A_i do najbliže od preostalih točaka. Dokaži da vrijedi

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \leq 16.$$

Županijsko natjecanje 2006., IV. razred, A varijanta – rješenja zadataka
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Za realan broj x definiraju se: najveće cijelo od x, $\lfloor x\rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x i decimalni dio od x, $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

   Npr. $\lfloor 3.14\rfloor = 3$, $\{3.14\} = 0.14$, $\lfloor -2.4\rfloor = -3$, $\{-2.4\} = 0.6$.

   Odredi sve pozitivne brojeve x za kojeg su $\{x\}$, $\lfloor x\rfloor$ i x tri uzastopna člana geometrijskog niza.

Prvo rješenje.

Mora biti $\{x\} \cdot x = \lfloor x\rfloor^2$. (2 boda)

Za $\lfloor x\rfloor = 0$, dobili bismo geometrijski niz 0, 0, 0. (2 boda)

Za $\lfloor x\rfloor = 1$ imamo

$x \in [1, 2\rangle$, $\{x\} = x - 1 \in [0, 1\rangle$ i $\{x\} \cdot x = 1$, tj. $x(x-1) = 1$.

Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$ su $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, pa zbog $x > 0$ imamo $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Tada je $\{x\} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.) (8 bodova)

Za $\lfloor x\rfloor \geq 2$ vrijedi

$$\lfloor x\rfloor^2 \geq 2\lfloor x\rfloor,$$

a zbog $\{x\} \cdot x < x < \lfloor x\rfloor + 1 < 2\lfloor x\rfloor$, je $\lfloor x\rfloor^2 > \{x\} \cdot x$, pa nema drugih rješenja. (8 bodova)

Drugo rješenje.

Iz $\dfrac{\{x\}}{\lfloor x\rfloor} = \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ slijedi $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{\{x\}} = \dfrac{x}{\lfloor x\rfloor} = \dfrac{\lfloor x\rfloor + \{x\}}{\lfloor x\rfloor} = 1 + \dfrac{\{x\}}{\lfloor x\rfloor}$ (5 bodova)

Ako je $\lfloor x\rfloor \geq 2$, na lijevoj strani ove jednakosti je broj veći od 2, a na desnoj broj manji od 2. Zato je $\lfloor x\rfloor = 1$, ($\lfloor x\rfloor \neq 0$). (5 bodova)

Sada je $1 + \{x\} = \dfrac{1}{\{x\}}$, tj. $\{x\}^2 + \{x\} - 1 = 0$. Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Zbog $0 \leq \{x\} < 1$, slijedi $\{x\} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (5 bodova)

Dakle, $x = \dfrac{1}{\{x\}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (5 bodova)

2. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je polinom $(x+1)^n - x^n - 1$ djeljiv s $x^2 + x + 1$.

Rješenje.

Nultočke trinoma $x^2 + x + 1$ su $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, pa je dovoljno naći $n \in \mathbb{N}$ takve da one budu i nultočke zadanog polinoma, tj. takve da vrijedi

$$\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right)^n - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1 = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1 = 0.$$

(5 bodova)

Kako je $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3}$, i $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$, brojevi $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ i $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ su redom korijeni polinoma $(x^3 - 1)$ i $(x^3 + 1)$, tj. vrijedi

$$\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1 \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1.$$

(3 boda)

Zato je dovoljno promatrati slučajeve $n = 3k$, $n = 3k + 1$ i $n = 3k + 2$.

1° Za $n = 3k$ imamo

$$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3k} - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3k} - 1 = (-1)^k - 1^k - 1 = (-1)^k \neq 0.$$

(2 boda)

2° Za $n = 3k + 1$ računamo

$$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3k+1} - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3k+1} - 1 = (-1)^k \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 = \ldots$$

Za neparno k dalje imamo

$$\ldots = (-1)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 = -1 - \mp\sqrt{3} \neq 0,$$

a za parno k

$$\ldots = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 = 0.$$

(4 boda)

3° Za $n = 3k + 2$ dobivamo

$$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3k+2} - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{3k+2} - 1 = (-1)^k \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 = \ldots$$

Za neparno k ovaj izraz poprima vrijednost

$$\ldots = -\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 = 0,$$

a za parno k

$$\ldots = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 = -1 \pm \sqrt{3}i \neq 0.$$

(4 boda)

Dakle, zadovoljavaju brojevi oblika $n = 3 \cdot 2l + 1$ i $n = 3(2l+1) + 2$ tj. $n = 6l + 1$, $n = 6l + 5$, $(l \in \mathbb{N}_0)$.

(2 boda)

Napomena. Ovo se može malo elegantnije zapisati pomoću trigonometrijskog ili eksponencijalnog oblika kompleksnog broja.

3. Neka kružnica polumjera r siječe hiperbolu $xy = 1$ u četiri točke $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$. Dokaži da vrijedi:

(a) $x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$,

(b) $\sum_{k=1}^{4} |OP_k|^2 = 4r^2$ (O je ishodište koordinatnog sustava).

Rješenje.

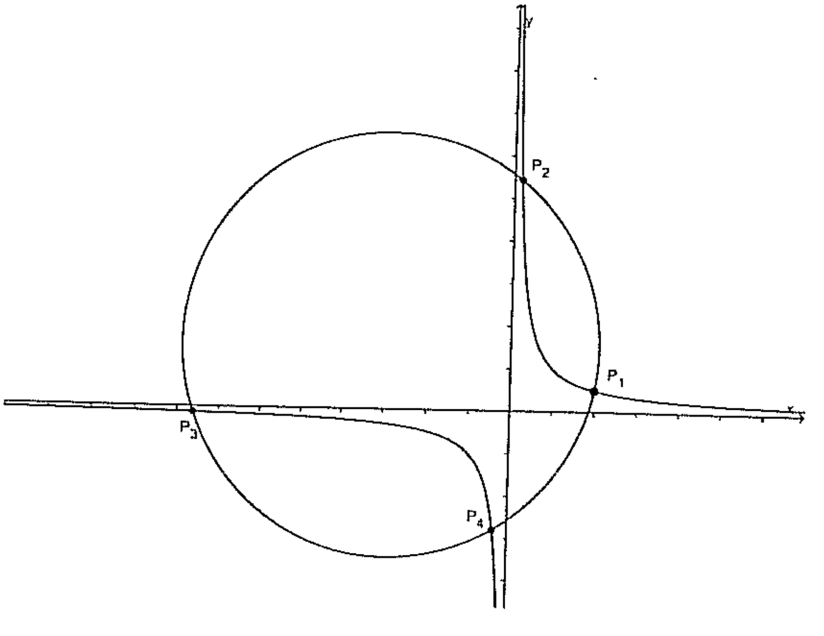
Jednadžbu kružnice napišimo u obliku $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Apscise zajedničkih točaka hiperbole i kružnice su rješenja jednadžbe $(x-p)^2 + \left(\frac{1}{x} - q\right)^2 = r^2$, ili nakon sređivanja,

$$x^4 - 2px^3 + (p^2 + q^2 - r^2)x^2 - 2qx + 1 = 0. \qquad (*)$$

(4 boda)

Vièteove formule za jednažbu $(*)$ glase:

$$\begin{aligned} A &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2p, \\ B &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = p^2 + q^2 - r^2, \\ C &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 2q, \\ D &= x_1x_2x_3x_4 = 1. \end{aligned}$$



(a) Prema Vièovim formulama je $x_1x_2x_3x_4 = 1$. (2 boda)

Zbog $y_1y_2y_3y_4 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} \cdot \frac{1}{x_4} = 1$, vrijedi i $y_1y_2y_3y_4 = 1$. (2 boda)

Napomena. Učenik koji primijeti da iz $x_1x_2x_3x_4 = 1$ slijedi $y_1y_2y_3y_4 = 1$ dobiva 2 boda, čak i ako nije pokazao da je $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

(b) Imamo:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{4} |OP_k|^2 = |OP_1|^2 + |OP_2|^2 + |OP_3|^2 + |OP_4|^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + x_4^2 + y_4^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2}\right). \end{aligned}$$

(3 boda)

Kako je

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + \ldots + x_3x_4) = A^2 - 2B;$$

(3 boda)

i

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} \\ =\ & \frac{x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_4^2}{(x_1x_2x_3x_4)^2} = (x_1x_2x_3)^2 + (x_1x_2x_4)^2 + (x_1x_3x_4)^2 + (x_2x_3x_4)^2 \\ =\ & C^2 - 2(x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_3^2x_4 + x_1^2x_2x_3x_4^2 + x_1x_2^2x_3^2x_4 + x_1x_2^2x_3x_4^2 + x_1x_2x_3^2x_4^2) \\ =\ & C^2 - 2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\ =\ & C^2 - 2 \cdot 1 \cdot B, \end{aligned}$$

(4 boda)

slijedi

$$S = (A^2 - 2B) + (C^2 - 2B) = (4p^2 - 2p^2 - 2q^2 + 2r^2) + (4q^2 - 2p^2 - 2q^2 + 2r^2) = 4r^2.$$

(2 boda)

4. U skupu realnih brojeva riješi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x^{2006}+y^{2006}+z^{2006} &= 2, \\ x^{2007}+y^{2007}+z^{2007} &= 2, \\ x^{2008}+y^{2008}+z^{2008} &= 2. \end{aligned}$$

Rješenje.

Zbrojimo prvu i treću jednadžbu i oduzmemo drugu pomnoženu s 2:

$$\begin{aligned} &(x^{2006}+y^{2006}+x^{2006})+(x^{2008}+y^{2008}+z^{2008})-2\cdot(x^{2007}+y^{2007}+z^{2007}) \\ = \;& 2+2-2\cdot 2 \\ \Leftrightarrow \;& (x^{2006}+x^{2008}-2\cdot x^{2007})+(y^{2006}+y^{2008}-2\cdot y^{2007})+(z^{2006}+z^{2008}-2\cdot z^{2007})=0 \\ \Leftrightarrow \;& x^{2006}\cdot(x-1)^2+y^{2006}\cdot(y-1)^2+z^{2006}\cdot(z-1)^2=0. \end{aligned}$$

Zbroj nenegativih izraza je jednak 0, pa je svaki od njih jednak 0. Zato je $x,\ y,\ z\in\{0,\ 1\}$
(15 bodova)

Konačno rješenja sustava su $(x,y,z)\in\{(0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\}$. (5 bodova)

Napomene.

— Za oduzimanje prve i druge jednadžbe

$$x^{2006}+y^{2006}+z^{2006}-x^{2007}-y^{2007}-z^{2007}=0,$$

učenik dobiva 2 boda.

— Za pogođena sva tri rješenja bez argumentacije da drugih realnih rješenja nema daje se 2 boda.

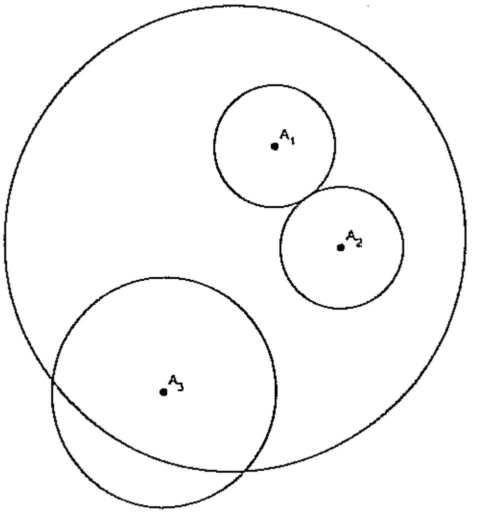
5. Unutar kruga polumjera 1 nalazi se n različitih točaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$). Za $i = 1, 2, \ldots, n$ neka d_i označava udaljenost od A_i do najbliže od preostalih točaka. Dokaži da vrijedi

$$d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2 \leq 16.$$

Rješenje.

Neka je K_i krug sa središtem A_i polumjera $\frac{d_i}{2}$.

Uočimo da iz $d_i < 2$ slijedi $1 + \frac{d_i}{2} \leq 2$, pa krug polumjera 2 sadrži sve krugove $K_1, \ldots, K_n$.



Osim toga, za $i \neq j$ vrijedi $d_i \leq |A_iA_j|$, $d_j \leq |A_iA_j|$, odakle je $\frac{d_i}{2} + \frac{d_j}{2} \leq |A_iA_j|$, pa krugovi K_i, K_j imaju disjunktne nutrine.

(15 bodova)

Zato je ukupna površina krgova K_i manja od površine velikog kruga,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d_i}{2}\right)^2 \pi \leq 4 \cdot \pi, \qquad \text{tj.} \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 16.$$

(5 bodova)

Napomena. Ideja promatranja ovih ili nekih drugih kružnica (recimo polumjera d_i oko točke A_i), ali bez konkretnih zaključaka - 5 bodova.