MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA, Županijsko natjecanje

Zadaci za **IV. razred** srednje škole, **B varijanta**

14. ožujka 2006.

1. Razlika predzadnjeg i prvog člana konačnog aritmetičkog niza je 24. Zbroj svih članova je 102, a razlika niza jednaka je trostrukom prvom članu. Odredi taj niz.

2. Prikazi jednog prirodnog broja n sustavima s bazama 7 i 9 imaju iste tri znamenke, ali u obrnutim porecima. Odredi sve takve brojeve?

3. Za realan broj x definiraju se: najveće cijelo od x, $\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x i decimalni dio od x, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

   Npr. $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\{3.14\} = 0.14$, $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$, $\{-2.4\} = 0.6$.

   Riješi jednadžbu $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor} = \{x\} + \dfrac{1}{\{x\}}$.

4. U ravnini je dan jednakostraničan trokut ABC. Odredi skup svih točaka T ravnine za koje vrijedi

$$|TA|^2 + |TB|^2 = |TC|^2.$$

   Koja je to krivulja i u kakvom je ona položaju u odnosu na točke A, B i C ?

5. U skupu realnih brojeva riješi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} &= 2\,, \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} &= 2\,, \\ x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} &= 2\,. \end{aligned}$$

Županijsko natjecanje 2006., IV. razred, B varijanta – rješenja zadataka

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 20 bodova.

1. Razlika predzadnjeg i prvog člana konačnog aritmetičkog niza je 24. Zbroj svih članova je 102. Razlika niza jednaka je trostrukom prvom članu. Odredi taj niz.

Rješenje.
Neka je prvi član traženog niza a, razlika niza d, a broj članova niza n. Traženi niz je

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-1)d,$$

i pritom je $n > 2$. Prema uvjetima zadatka je:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad & (a+(n-2)d)-a &= 24,\\ &(2) \qquad & \frac{n}{2}(2a+(n-1)d) &= 102,\\ &(3) \qquad & d &= 3a. \end{aligned}$$

(4 boda)

Sređivanjem prve jednadžbe dobivamo $(n-2)d = 24$, odnosno, zbog (3),

$$(4) \qquad (n-2)a = 8,$$

Iz (2) slijedi

$$(5) \qquad \frac{n}{2}(2a+3(n-1)) = 102, \qquad \text{odnosno} \qquad na(3n-1) = 204.$$

(5 bodova)

Iz (4) slijedi $a = \dfrac{8}{n-2}$, pa uvrštavanjem u (5) dobivamo kvadratnu jednadžbu $6n^2 - 53n + 102 = 0$. (4 boda)

Njezina rješenja su $n_{1,2} = \dfrac{53 \pm \sqrt{53^2 - 4\cdot 6\cdot 102}}{12}$, tj. $n_1 = 6$, $n_2 = \dfrac{17}{6}$, a kako je n prirodan broj, $n = 6$, (3 boda)

i dalje je $a = 2$, $d = 6$, (2 boda)

pa je traženi niz $2, 8, 14, 20, 26, 32$. (2 boda)

2. Prikazi jednog prirodnog broja n sustavima s bazama 7 i 9 imaju iste tri znamenke, ali u obrnutim porecima. Odredite sve takve brojeve.

Rješenje.
Uvjet zadatka možemo zapisati ovako: $(abc)_7 = (cba)_9$, (2 boda)

odnosno,

$$7^2a + 7b + c = 9^2c + 9b + a.$$

(5 bodova

Nakon sređivanja dobivamo $b = 8(3a - 5c)$. (2 boda)

Slijedi $8|b$, no kako je $b < 7$ (b je znamenka u sustavu 7), mora biti $b = 0$, (4 boda)

pa je $3a = 5c$, (2 boda)

odnosno (jer su a i $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), $a = 5$ i $c = 3$ (a rješenje $a = b = 0$ bi dalo nulu, no nula nije prirodan broj). (3 boda)

Traženi broj je $503_7 = 305_9 = 248_{10}$. (2 boda)

Napomena. Učenik koji uz točno rješenje dobije i rješenja za $b = 8$ (dobije se $a = 2$, $c = 1$ i $a = 7$, $c = 4$) gubi 6 bodova.

3. Za realan broj x definiraju se: najveće cijelo od x, $\lfloor x \rfloor$ je najveći cijeli broj koji nije veći od x i decimalni dio od x, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Npr. $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\{3.14\} = 0.14$, $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$, $\{-2.4\} = 0.6$.

Riješi jednadžbu $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor} = \{x\} + \dfrac{1}{\{x\}}$.

Rješenje.
Kako je

$$\lfloor x \rfloor - \{x\} = \frac{1}{\{x\}} - \frac{1}{\lfloor x \rfloor} = \frac{\lfloor x \rfloor - \{x\}}{\lfloor x \rfloor \cdot \{x\}},$$

jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$(\lfloor x \rfloor - \{x\})\left(1 - \frac{1}{\lfloor x \rfloor \cdot \{x\}}\right) = 0.$$

(5 bodova)

Odavde dobivamo:

(1) $\lfloor x \rfloor = \{x\}$, ili

(2) $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} = 1$. (2 boda)

(1) je moguće samo ako je $\lfloor x \rfloor = \{x\} = 0$, jer je $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, a $\{x\} \in [0, 1)$. No, tada dana jednakost nema smisla. (3 boda)

Iz (2) slijedi $\lfloor x \rfloor > 0$, jer je $\{x\} \geq 0$. (2 boda)

Zato je $\lfloor x \rfloor = n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. (2 boda)

Zbog (2) je $\{x\} = \dfrac{1}{n}$, (2 boda)

pa mora biti $n > 1$. (2 boda)

Danu jednadžbu zadovoljavaju svi brojevi $x = n + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. (2 boda)

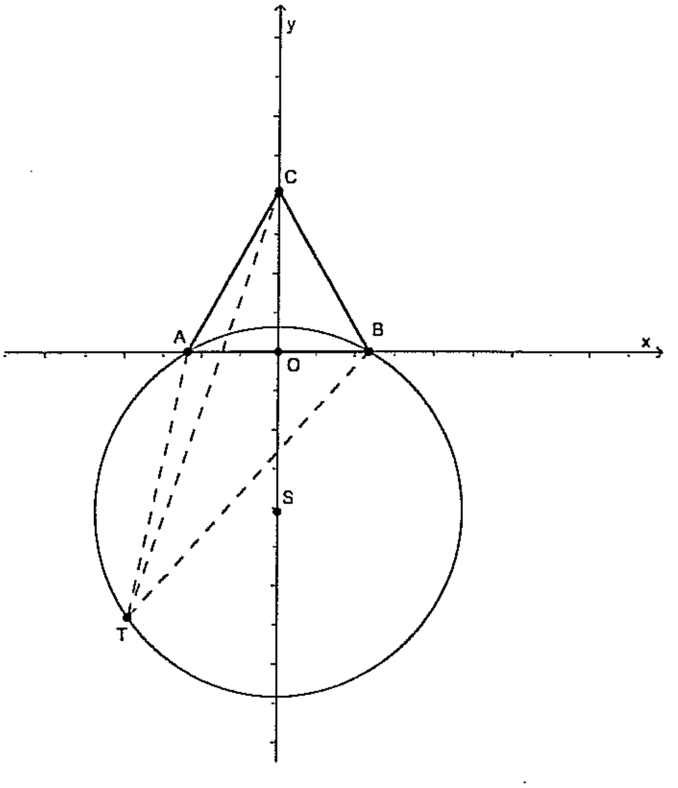
Napomena. Ako učenik ne pazi na uvjet $n \neq 1$, gubi 2 boda.

4. U ravnini je dan jednakostraničan trokut ABC. Odredi skup svih točaka T ravnine za koje vrijedi

$$|TA|^2 + |TB|^2 = |TC|^2.$$

Koja je to krivulja i u kakvom je ona položaju u odnosu na točke A, B i C ?

Rješenje.
Neka je a duljina stranice trokuta ABC. Postavimo ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava u polovište stranice $\overline{AB}$, vrhove trokuta A i B na os x, a vrh C na os y, kao na slici.



Koordinate vrhova trokuta ABC su:

$$A\left(-\frac{a}{2},0\right), \quad B\left(\frac{a}{2},0\right), \quad C\left(0,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

Tražimo točku $T(x,y)$ koja zadovoljava dani uvjet.

$$|TA|^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2, \qquad \text{(3 boda)}$$

$$|TB|^2 = \left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2, \qquad \text{(3 boda)}$$

$$|TC|^2 = x^2 + \left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 - ay\sqrt{3} + \frac{3a^2}{4}. \qquad \text{(3 boda)}$$

Uvrštavanjem u dani uvjet dobiva se:

$$x^2+y^2+ay\sqrt{3}-\frac{a^2}{4}=0, \qquad \text{(4 boda)}$$

odnosno

$$x^2+\left(y+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=a^2.$$

Tražena krivulja je kružnica (1 bod)

sa središtem $S\left(0,-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, (1 bod)

polumjera $r=a$. (1 bod)

Ona prolazi točkama A i B, a središte joj je simetrično točki C u odnosu na pravac AB. (2 boda)

Napomena. Ako se vrh A postavi u ishodište, a vrh B na os x, dobiva se

$$|AT|^2=x^2+y^2,\ |BT|^2=(a-x)^2+y^2,\ |CT|^2=\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}-y\right)^2,$$

te jednadžbu kružnice $x^2+y^2-ax+ay\sqrt{3}=0$.

5. U skupu realnih brojeva riješi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x^{2006}+y^{2006}+z^{2006} &= 2\,,\\ x^{2007}+y^{2007}+z^{2007} &= 2\,,\\ x^{2008}+y^{2008}+z^{2008} &= 2\,. \end{aligned}$$

Rješenje.

Zbrojimo prvu i treću jednadžbu i oduzmemo drugu pomnoženu s 2:

$$\begin{aligned} &(x^{2006}+y^{2006}+x^{2006})+(x^{2008}+y^{2008}+z^{2008})-2\cdot(x^{2007}+y^{2007}+z^{2007})\\ =\ & 2+2-2\cdot 2\\ \Leftrightarrow\ & (x^{2006}+x^{2008}-2\cdot x^{2007})+(y^{2006}+y^{2008}-2\cdot y^{2007})+(z^{2006}+z^{2008}-2\cdot z^{2007})=0\\ \Leftrightarrow\ & x^{2006}\cdot(x-1)^2+y^{2006}\cdot(y-1)^2+z^{2006}\cdot(z-1)^2=0. \end{aligned}$$

Zbroj nenegativih izraza je jednak 0, pa je svaki od njih jednak 0. Zato je $x,\ y,\ z\in\{0,\ 1\}$ (15 bodova)

Konačno rješenja sustava su $(x,y,z)\in\{(0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\}$. (5 bodova)

Napomene.

— Za oduzimanje prve i druge jednadžbe

$$x^{2006}+y^{2006}+z^{2006}-x^{2007}-y^{2007}-z^{2007}=0,$$

učenik dobiva 2 boda.

— Za pogođena sva tri rješenja bez argumentacije da drugih realnih rješenja nema daje se 2 boda.