

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE
MLADIH MATEMATIČARA
REPUBLIKE HRVATSKE

Zadaci za 8. razred

14. ožujka 2006.

1. Izračunaj

$$\left(7 + \frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0.15 \cdot \frac{1}{0.2} - 8\right)^3 - \sqrt{\frac{115^2 - 110^2}{5}} + \frac{\sqrt{30^2 - 18^2}}{4}$$

2. Odredi dva uzastopna prirodna broja, tako da se jedan može prikazati kao umnožak $2(n-3)(n+1)$, a drugi kao umnožak $(n-2)(2n-1)$, pri čemu je n prirodan broj.
3. Nađi jednakost koja povezuje brojeve a , b i c ako su oni oblika $a = m^2 + n^2$, $b = 2mn$ i $c = m^2 - n^2$.
4. Zadan je četverokut $ABCD$ s okomitim dijagonalama kojemu se može opisati kružnica. Točka M je presjek dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} . Kolika je površina četverokuta $ABCD$, ako je $|AB| = 13$, $|DM| = 10$ i $|CD| = 26$?
5. Zadan je kvadrat $ABCD$ kojemu je opisana kružnica k . Na manjem od dva luka kružnice, određenih točkama A i B , dana je proizvoljna točka P , različita od A i B . Dokaži da vrijedi jednakost

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4|AB|^2$$

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Redom imamo da je

$$\left(7 + \frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0.15 \cdot \frac{1}{0.2} - 8\right)^3 = \left(7 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} - \frac{0.15}{0.2} - 8\right)^3 = \left(7 + \frac{4}{9} - \frac{3}{4} - 8\right)^3 = (-1)^3 = -1$$

4 BODA

Primjenom razlike kvadrata imamo da je

$$\sqrt{\frac{115^2 - 110^2}{5}} = \sqrt{\frac{(115 - 110)(115 + 110)}{5}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 225}{5}} = \sqrt{225} = 15.$$

2 BODA

i slično,

$$\frac{\sqrt{30^2 - 18^2}}{4} = \frac{\sqrt{(30 - 18)(30 + 18)}}{4} = \frac{\sqrt{12 \cdot 48}}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

2 BODA

Konačno, vrijednost traženog izraza je jednaka $-1 - 15 + 6 = -10$.

2 BODA

UKUPNO 10 BODOVA

2. Razlika dva uzastopna prirodna broja je jednaka 1, pa u ovisnosti o tome koji je umnožak veći, imamo dva slučaja.

U prvom slučaju imamo da je $2(n - 3)(n + 1) - (n - 2)(2n - 1) = 1$,

odnosno $2(n^2 - 2n - 3) - (2n^2 - 5n + 2) = 1$, odakle je $n = 9$.

3 BODA

U tom slučaju, traženi uzastopni brojevi su 119 i 120.

2 BODA

U drugom slučaju imamo da je $(n - 2)(2n - 1) - 2(n - 3)(n + 1) = 1$,

odnosno $(2n^2 - 5n + 2) - 2(n^2 - 2n - 3) = 1$, odakle je $n = 7$.

3 BODA

U tom slučaju, traženi uzastopni brojevi su 64 i 65.

2 BODA

UKUPNO 10 BODOVA

3. Zbrajanjem prve i treće jednakosti dobivamo $a + c = 2m^2$.

2 BODA

Oduzimanjem treće jednakosti od prve, dobivamo $a - c = 2n^2$.

2 BODA

Množenjem prethodnih dviju jednakosti slijedi $(a + c)(a - c) = 4m^2n^2$,

odnosno zbog razlike kvadrata, $a^2 - c^2 = 4m^2n^2$.

3 BODA

Kvadriranjem druge jednakosti slijedi $b^2 = 4m^2n^2$.

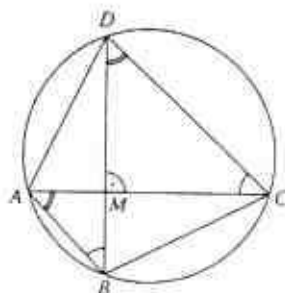
1 BOD

Konačno, uspoređivanjem posljednjih dviju jednakosti slijedi $a^2 - c^2 = b^2$, odnosno $a^2 = b^2 + c^2$.

2 BODA

UKUPNO 10 BODOVA

4. SKICA



1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut CDM slijedi $|CM| = \sqrt{|CD|^2 - |DM|^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.

1 BOD

Lagano slijedi da su trokuti ABM i CDM slični. Naime, imaju po jedan pravi kut, te vrijedi $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$, jer su to obodni kutovi nad istim tetivama. Iz dokazane sličnosti slijedi omjer $|AB| : |BM| = |CD| : |CM|$, odnosno $13 : |BM| = 26 : 24$, odakle je $|BM| = 12$.

2 BODA

Sada je $|BD| = |BM| + |DM| = 12 + 10 = 22$.

1 BOD

Iz omjera $|AM| : |AB| = |DM| : |CD|$ slijedi $|AM| : 13 = 10 : 26$, odakle je $|AM| = 5$.

1 BOD

Sada je $|AC| = |AM| + |CM| = 5 + 24 = 29$.

1 BOD

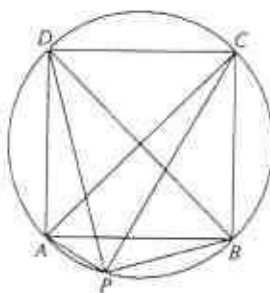
Kako četverokut $ABCD$ ima okomite dijagonale, za površinu vrijedi

$$P(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \frac{29 \cdot 22}{2} = 319.$$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. SKICA



Kako su \overline{AC} i \overline{BD} dijometri kružnice k , prema Talesovom poučku slijedi da su trokuti PBD i APC pravokutni.

1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na ta dva trokuta dobivamo jednakosti

1 BOD

$$|PB|^2 + |PD|^2 = |BD|^2 \tag{1}$$

$$|PA|^2 + |PC|^2 = |AC|^2 \tag{2}$$

4 BODA

2 BODA

Kako je $|BD| = |AC| = |AB|\sqrt{2}$, slijedi da je $|BD|^2 = |AC|^2 = 2|AB|^2$.

Zbrajanjem jednakosti (1) i (2), te uvažavanjem prethodnog uvjeta slijedi

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4|AB|^2.$$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA