MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

ŽUPANIJSKO NATJECANJE MLADIH MATEMATIČARA REPUBLIKE HRVATSKE

Zadaci za 8. razred

14. ožujka 2006

1. Izračunaj

$$\left(7+\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{3}\right)^2-0.15\cdot\frac{1}{0.2}-8\right)^3-\sqrt{\frac{115^2-110^2}{5}}+\frac{\sqrt{30^2-18^2}}{4}.$$

2. Odredi dva uzastopna prirodna broja, tako da se jedan može prikazati kao umnožak $2(n-3)(n+1)$, a drugi kao umnožak $(n-2)(2n-1)$, pri čemu je n prirodan broj.

3. Nađi jednakost koja povezuje brojeve a, b i c ako su oni oblika $a=m^2+n^2$, $b=2mn$ i $c=m^2-n^2$.

4. Zadan je četverokut $ABCD$ s okomitim dijagonalama kojemu se može opisati kružnica. Točka M je presjek dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Kolika je površina četverokuta $ABCD$, ako je $|AB|=13$, $|DM|=10$ i $|CD|=26$?

5. Zadan je kvadrat $ABCD$ kojemu je opisana kružnica k. Na manjem od dva luka kružnice, određenih točkama A i B, dana je proizvoljna točka P, različita od A i B. Dokaži da vrijedi jednakost

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2=4|AB|^2.$$

ŽN 2006.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Redom imamo da je

$$\left(7+\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{3}\right)^2-0.15\cdot\frac{1}{0.2}-8\right)^3=\left(7+\frac{1}{3}:\frac{4}{9}-\frac{0.15}{0.2}-8\right)^3=\left(7+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}-8\right)^3=(-1)^3=-1$$

4 BODA

Primjenom razlike kvadrata imamo da je

$$\sqrt{\frac{115^2-110^2}{5}}=\sqrt{\frac{(115-110)(115+110)}{5}}=\sqrt{\frac{5\cdot 225}{5}}=\sqrt{225}=15,$$

2 BODA

i slično,

$$\frac{\sqrt{30^2-18^2}}{4}=\frac{\sqrt{(30-18)(30+18)}}{4}=\frac{\sqrt{12\cdot 48}}{4}=\frac{24}{4}=6.$$

2 BODA

Konačno, vrijednost traženog izraza je jednaka $-1-15+6=-10$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

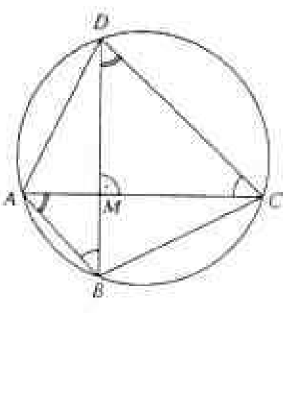
2. Razlika dva uzastopna prirodna broja je jednaka 1, pa u ovisnosti o tome koji je umnožak veći, imamo dva slučaja.
U prvom slučaju imamo da je $2(n-3)(n+1)-(n-2)(2n-1)=1$,
odnosno $2(n^2-2n-3)-(2n^2-5n+2)=1$, odakle je $n=9$. 3 BODA
U tom slučaju, traženi uzastopni brojevi su 119 i 120. 2 BODA
U drugom slučaju imamo da je $(n-2)(2n-1)-2(n-3)(n+1)=1$,
odnosno $(2n^2-5n+2)-2(n^2-2n-3)=1$, odakle je $n=7$. 3 BODA
U tom slučaju, traženi uzastopni brojevi su 64 i 65. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Zbrajanjem prve i treće jednakosti dobivamo $a+c=2m^2$. 2 BODA
Oduzimanjem treće jednakosti od prve, dobivamo $a-c=2n^2$. 2 BODA
Množenjem prethodnih dviju jednakosti slijedi $(a+c)(a-c)=4m^2n^2$,
odnosno zbog razlike kvadrata, $a^2-c^2=4m^2n^2$. 3 BODA
Kvadriranjem druge jednakosti slijedi $b^2=4m^2n^2$. 1 BOD
Konačno, uspoređivanjem posljednjih dviju jednakosti slijedi $a^2-c^2=b^2$, odnosno $a^2=b^2+c^2$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. SKICA



1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut CDM slijedi $|CM|=\sqrt{|CD|^2-|DM|^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$. 1 BOD

Ž N 2006.

Lagano slijedi da su trokuti ABM i CDM slični. Naime, imaju po jedan pravi kut, te vrijedi $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$, jer su to obodni kutovi nad istim tetivama. 2 BODA

Iz dokazane sličnosti slijedi omjer $|AB| : |BM| = |CD| : |CM|$, odnosno $13 : |BM| = 26 : 24$, odakle je $|BM| = 12$. 1 BOD

Sada je $|BD| = |BM| + |DM| = 12 + 10 = 22$. 1 BOD

Iz omjera $|AM| : |AB| = |DM| : |CD|$ slijedi $|AM| : 13 = 10 : 26$, odakle je $|AM| = 5$. 1 BOD

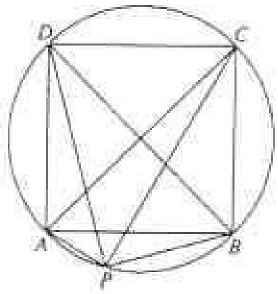
Sada je $|AC| = |AM| + |CM| = 5 + 24 = 29$. 1 BOD

Kako četverokut $ABCD$ ima okomite dijagonale, za površinu vrijedi

$$P(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \frac{29 \cdot 22}{2} = 319.$$ 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. SKICA



Kako su $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ dijametri kružnice k, prema Talesovom poučku 1 BOD

slijedi da su trokuti PBD i APC pravokutni. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na ta dva trokuta dobivamo jednakosti

$$|PB|^2 + |PD|^2 = |BD|^2 \qquad (1)$$
$$|PA|^2 + |PC|^2 = |AC|^2 \qquad (2)$$

4 BODA

Kako je $|BD| = |AC| = |AB|\sqrt{2}$, slijedi da je $|BD|^2 = |AC|^2 = 2|AB|^2$. 2 BODA

Zbrajanjem jednakosti (1) i (2), te uvažavanjem prethodnog uvjeta slijedi

$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4|AB|^2$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA