

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1B-1. Koja relacija povezuje brojeve a , b i c ako za neke x i y vrijede jednakosti

$$a = x - y, \quad b = x^2 - y^2, \quad c = x^3 - y^3?$$

Zadatak 1B-2. Zadan je pravokutan trokut $\triangle ABC$, s pravim kutom pri vrhu C . Na kateti \overline{BC} odaberimo točku A_1 , a na kateti \overline{AC} točku B_1 . Dokažite da je

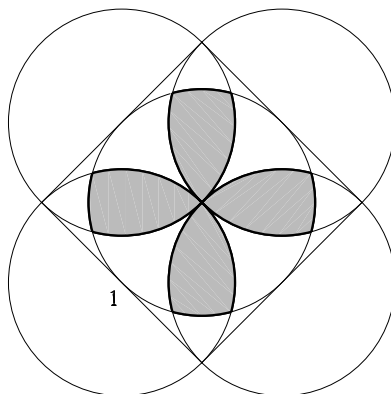
$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 = |AB|^2 + |A_1B_1|^2.$$

Zadatak 1B-3. Dokažite da je broj

$$\underbrace{111 \dots 1}_{2n} - \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ znamenaka}}$$

kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 1B-4. Kvadratu stranice duljine 1 upisana je kružnica, a nad njegovim stranicama kao promjerima konstruirane su četiri kružnice. Izračunajte opseg “pro-pelera” na slici.



Zadatak 1B-5. Nađite sve prirodne brojeve $m, n \in \mathbf{N}$ takve da vrijedi

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 2B-1. Odredite sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.

Zadatak 2B-2. Ako su a, b i c duljine stranica nekog trokuta, dokažite da je funkcija

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

pozitivna za svaki realni x .

Zadatak 2B-3. Dan je skup parabola $y = (k - 2)x^2 - 2kx + k + 2$, pri čemu je $k \neq 2$ realni broj.

a) Dokažite da tjemena svih tih parabola leže na istom pravcu i odredite njegovu jednadžbu.

b) Imaju li sve ove parabole zajedničku točku?

Zadatak 2B-4. Na dijagonalama \overline{AC} i \overline{BD} konveksnog četverokuta $ABCD$ izabrane su redom točke M i N tako da je $MB \parallel AD$ i $NA \parallel BC$. Dokažite da je $MN \parallel CD$.

Zadatak 2B-5. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijede nejednakosti:

a)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

b)

$$\frac{ab + c^2}{a + b} + \frac{bc + a^2}{b + c} + \frac{ca + b^2}{c + a} \geq a + b + c.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 3B-1. a) Dokažite da vrijedi

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} (60^\circ + x) \cdot \operatorname{tg} (60^\circ - x).$$

b) Izračunajte

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Zadatak 3B-2. Ako su u konveksnom četverokutu jednaki zbrojevi kvadrata duljina suprotnih stranica, dokažite da su mu dijagonale okomite.

Zadatak 3B-3. Trapezu $ABCD$ je opisana i upisana kružnica. Omjer visine trapeza i polumjera opisane kružnice je $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Odredite kutove trapeza.

Zadatak 3B-4. Pravilni oktaedar je tijelo sastavljeno od dvije pravilne četverostrane piramide sa zajedničkom osnovkom i preostala dva vrha simetrična s obzirom na ravninu te osnovke, takvo da svih 12 bridova imaju jednake duljine.

Odredite omjer volumena opisane i upisane kugle pravilnom oktaedru.

Zadatak 3B-5. Dokažite da za sve proste brojeve $p > 3$ broj $p^2 + 11$ ima više od šest različitih prirodnih djelitelja (računajući 1 i samog sebe).

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 4B-1. U pravokutniku $ABCD$ zadane su točka E na stranici \overline{BC} i točka F na stranici \overline{CD} . Ako je trokut AEF jednakostraničan, dokažite da je da je

$$P_{\triangle ECF} = P_{\triangle ABE} + P_{\triangle AFD}.$$

Zadatak 4B-2. Pravac kroz točku $(0, a)$, $a > 0$, siječe simetrale kvadranta koordinatnog sustava u točkama A i B . Pokažite da polovište dužine AB leže na hiperboli. Odredite jednadžbu i koordinate središta te hiperbole.

Zadatak 4B-3. Dokažite da je najveći koeficijent u razvoju $(a + b)^{2n}$ paran broj.

Zadatak 4B-4. Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Nađite sve takve nizove.

Zadatak 4B-5. Ako su $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokažite da je

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija,
3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1B-1. Koja relacija povezuje brojeve a , b i c ako za neke x i y vrijede jednakosti

$$a = x - y, \quad b = x^2 - y^2, \quad c = x^3 - y^3?$$

Rješenje. Uvažavanjem prve jednakosti, druga i treća jednakost mogu se pojednostavniti:

$$b = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = a(x + y),$$
$$c = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = a(x^2 + xy + y^2).$$

Sada iz sustava

$$\begin{aligned}x - y &= a, \\x + y &= \frac{b}{a}, \\x^2 + xy + y^2 &= \frac{c}{a}\end{aligned}$$

želimo eliminirati x i y .

Iz prve dvije jednadžbe nalazimo $x = \frac{b + a^2}{2a}$, $y = \frac{b - a^2}{2a}$, što uvrštavanjem u treću jednadžbu daje

$$\left(\frac{b + a^2}{2a}\right)^2 + \frac{b + a^2}{2a} \cdot \frac{b - a^2}{2a} + \left(\frac{b - a^2}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a}.$$

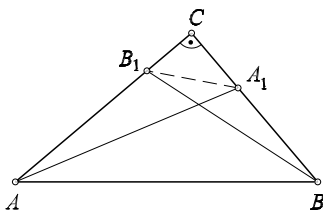
Nakon sređivanja ova jednakost poprima konačni oblik

$$a^4 + 3b^2 - 4ac = 0.$$

Zadatak 1B-2. Zadan je pravokutan trokut $\triangle ABC$, s pravim kutom pri vrhu C . Na kateti \overline{BC} odaberimo točku A_1 , a na kateti \overline{AC} točku B_1 . Dokažite da je

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 = |AB|^2 + |A_1B_1|^2.$$

Rješenje.



Iz pravokutnog trokuta AA_1C slijedi

$$|A_1A|^2 = |AC|^2 + |CA_1|^2,$$

a iz pravokutnog trokuta BB_1C slijedi

$$|BB_1|^2 = |B_1C|^2 + |CB|^2.$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} |AA_1|^2 + |BB_1|^2 &= |AC|^2 + |CB|^2 + |CA_1|^2 + |B_1C|^2 \\ &= |AB|^2 + |A_1B_1|^2, \end{aligned}$$

jer su trokuti ABC i A_1B_1C pravokutni.

Zadatak 1B-3. Dokažite da je broj

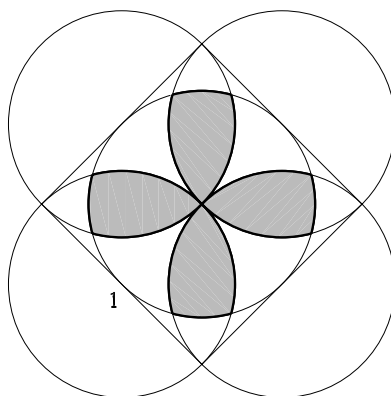
$$\underbrace{111 \dots 1}_{2n} - \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ znamenaka}}$$

kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

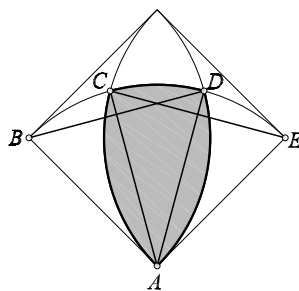
$$\begin{aligned} \underbrace{111 \dots 1}_{2n} - \underbrace{222 \dots 2}_n &= \underbrace{111 \dots 1}_{2n} - 2 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_n \\ &= (\underbrace{111 \dots 1}_n \underbrace{000 \dots 0}_n + \underbrace{111 \dots 1}_n) - 2 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_n \\ &= \underbrace{111 \dots 1}_n \underbrace{000 \dots 0}_n - \underbrace{111 \dots 1}_n \\ &= \underbrace{111 \dots 1}_n \cdot 10^n - \underbrace{111 \dots 1}_n \\ &= \underbrace{111 \dots 1}_n \cdot (10^n - 1) \\ &= \underbrace{111 \dots 1}_n \cdot \underbrace{999 \dots 9}_n \\ &= \underbrace{111 \dots 1}_n \cdot (9 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_n) \\ &= 9 \cdot (\underbrace{111 \dots 1}_n)^2 = (3 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_n)^2 \\ &= (\underbrace{333 \dots 3}_n)^2. \end{aligned}$$

Zadatak 1B-4. Kvadratu stranice duljine 1 upisana je kružnica, a nad njegovim stranicama kao promjerima konstruirane su četiri kružnice. Izračunajte opseg “propelera” na slici.



Rješenje.

Nacrtajmo četvrtinu kvadrata i odgovarajuće kružne lukove. Točka A je središte kvadrata, a B i E polovišta njegovih stranica.



Trokuti ABD i ACE su jednakostranični sa stranicom duljine 1, odakle slijedi da je trokut ACD jednakokrčan sa kracima \overline{AC} i \overline{AD} duljine 1 i kutom $\sphericalangle CAD = 30^\circ$. Zato je opseg četvrtine “propelera” koji je jednak zbroju duljina lukova \widehat{AC} , \widehat{AD} i \widehat{CD} jednak

$$2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Ukupni opseg propelera iznosi

$$4 \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}.$$

Zadatak 1B-5. Nađite sve prirodne brojeve $m, n \in \mathbf{N}$ takve da vrijedi

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

Rješenje. *Prvo rješenje.* Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $m \geq n$. Tada je

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} \leq \frac{2}{n} - \frac{1}{mn} < \frac{2}{n}.$$

Dakle

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{n} \iff n < 5.$$

Sredimo jednadžbu po m :

$$\begin{aligned} n + m - 1 &= \frac{2}{5}mn, \\ 5n - 5 &= 2mn - 5m, \\ m &= \frac{5n - 5}{2n - 5}. \end{aligned}$$

Za $n = 1, n = 2$ dobivamo $m \leq 0$, pa rješenje ne postoji.

Za $n = 3$ dobivamo $m = \frac{5 \cdot 3 - 5}{2 \cdot 3 - 5} = 10$.

Za $n = 4$ dobivamo $m = \frac{5 \cdot 4 - 5}{2 \cdot 4 - 5} = \frac{15}{3} = 5$.

Rješenja su $m = 10, n = 3; m = 5, n = 4; m = 4, n = 5; m = 3, n = 10$.

Drugo rješenje. Jednakost možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{m + n - 1}{mn} &= \frac{2}{5}, \\ \frac{mn - m - n + 1}{mn} &= 1 - \frac{2}{5}, \\ \frac{(m - 1)(n - 1)}{mn} &= \frac{3}{5}, \\ 5(m - 1)(n - 1) &= 3mn \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $m \geq n$. Broj $m - 1$ relativno je prost sa m , a broj $n - 1$ relativno je prost sa n . Zato su moguće samo dvije situacije:

(a) $m - 1 = n, 5(n - 1) = 3m$, ili (b) $m - 1 = 3n, 5(n - 1) = m$.

U slučaju (a) slijedi $5(n - 1) = 3(n + 1)$ pa je $n = 4$ i onda $m = 5$.

U slučaju (b) slijedi $5(n - 1) = 3n + 1$ pa je $n = 3$ i onda $m = 10$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija,
3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 2B-1. Odredite sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenastom broju s jednakim znamenkama.

Rješenje. Neka su to brojevi $2k - 1$, $2k + 1$ i $2k + 3$. Prema uvjetu zadatka, vrijedi

$$(2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 + (2k + 3)^2 = 1000x + 100x + 10x + x.$$

Ovdje je x neka od znamenaka $1, 2, \dots, 9$. Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} (*) \quad & 12k^2 + 12k + 11 = 1111x \\ & 12k^2 + 12k + 11 + 1 = 1111x + 1 \\ & 12(k^2 + k + 1) = 12 \cdot 92x + 7x + 1, \end{aligned}$$

tj. $7x + 1$ treba biti djeljivo s 12, a to je moguće samo ako je $x = 5$. Iz (*) sada slijedi

$$12k^2 + 12k + 11 = 5555$$

i odavde

$$k^2 + k - 462 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $k_1 = 21$ i $k_2 = -22$. Prema tome, traženi su brojevi $2k - 1 = 41$, $2k + 1 = 43$, $2k + 3 = 45$.

$$41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555$$

Zadatak 2B-2. Ako su a , b i c duljine stranica nekog trokuta, dokažite da je funkcija

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

pozitivna za svaki realni x .

Rješenje. Kvadratna funkcija $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ pozitivna je za svaki x ako je $A > 0$ i $D = B^2 - 4AC < 0$. Vrijedi $A = b^2 > 0$, pa je prvi uvjet ispunjen. Promotrimo diskriminantu:

$$\begin{aligned} D &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 \\ &= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) \\ &= [(b - c)^2 - a^2][(b + c)^2 - a^2] \\ &= (b - c - a)(b - c + a)(b + c - a)(b + c + a). \end{aligned}$$

Kako su a , b i c duljine stranica trokuta, imamo: $a + b + c > 0$, $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$ i $c + a - b > 0$ (tj. $b - a - c < 0$). Odavde slijedi da je $D < 0$.

Zadatak 2B-3. Dan je skup parabola $y = (k - 2)x^2 - 2kx + k + 2$, pri čemu je $k \neq 2$ realni broj.

a) Dokažite da tjemena svih tih parabola leže na istom pravcu i odredite njegovu jednadžbu.

b) Imaju li sve ove parabole zajedničku točku?

Rješenje. a) Apscisa tjemena iznosi

$$x = \frac{2k}{2(k - 2)} = \frac{k}{k - 2},$$

a ordinata

$$y = \frac{4(k^2 - 4) - 4k^2}{4(k - 2)} = -\frac{4}{k - 2}.$$

Kako iz $x = \frac{k}{k - 2}$ slijedi $k = \frac{2x}{x - 1}$, to je

$$y = -\frac{4}{\frac{2x}{x-1} - 2} = -2x + 2.$$

Dakle, geometrijsko mjesto tjemena svih ovih parabola je pravac $y = -2x + 2$.

b) Danu parabolu možemo zapisati ovako:

$$k(x^2 - 2x + 1) - y + 2 - 2x^2 = 0.$$

Točka čije koordinate zadovoljavaju sustav jednadžbi

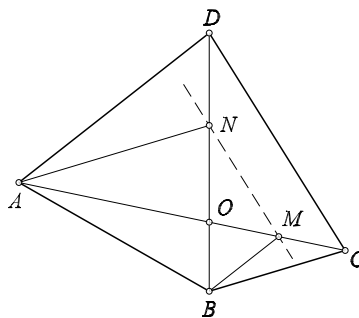
$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ -2x^2 - y + 2 = 0 \end{cases}$$

leži na svim parabolama.

Iz prve jednadžbe je $x = 1$, pa iz druge dobivamo $y = 0$.

Zadatak 2B-4. Na dijagonalama \overline{AC} i \overline{BD} konveksnog četverokuta $ABCD$ izabrane su redom točke M i N tako da je $MB \parallel AD$ i $NA \parallel BC$. Dokažite da je $MN \parallel CD$.

Rješenje. Promatramo proporcije s obzirom na točku O presjeka dijagonala.



Iz sličnosti trokuta OBM i ODA :

$$\frac{|OM|}{|OB|} = \frac{|OA|}{|OD|}.$$

Iz sličnosti trokuta ONA i OBC :

$$\frac{|ON|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OC|}.$$

Odavde slijedi

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{|OD|} \cdot \frac{|OC|}{|OA| \cdot |OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}.$$

Zaključujemo da su trokuti OMN i OCD slični, pa je $MN \parallel CD$.

Zadatak 2B-5. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijede nejednakosti:

a)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

b)

$$\frac{ab + c^2}{a + b} + \frac{bc + a^2}{b + c} + \frac{ca + b^2}{c + a} \geq a + b + c.$$

Rješenje. a) Tražena nejednakost je redom ekvivalentna sa sljedećim nejednakostima:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca &\geq 0, \\ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

a ova posljednja ispunjena je za sve realne brojeve a, b, c . Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

b) Dokažimo da je razlika lijeve i desne strane nejednadžbe nenegativna.

$$\begin{aligned} &\frac{ab + c^2}{a + b} - c + \frac{bc + a^2}{b + c} - a + \frac{ca + b^2}{c + a} - b \\ &= \frac{c^2 + ab - ac - bc}{a + b} + \frac{a^2 + bc - ab - ac}{b + c} + \frac{b^2 + ac - ab - bc}{c + a} \\ &= \frac{(c - a)(c - b)}{a + b} + \frac{(a - b)(a - c)}{b + c} + \frac{(b - a)(b - c)}{c + a} \\ &= \frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \\ &= \frac{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 0 \quad (\text{prema a}). \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija,
3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 3B-1. a) Dokažite da vrijedi

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} (60^\circ + x) \cdot \operatorname{tg} (60^\circ - x).$$

b) Izračunajte

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Rješenje. a) Primjenjujemo adicijski teorem za tangens:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x + x) &= \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} \\ &= \frac{\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} \end{aligned}$$

S druge strane, vrijedi:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} (60^\circ + x) \cdot \operatorname{tg} (60^\circ - x) &= \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} x} \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x} \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}. \end{aligned}$$

Iz jednakosti desnih strana slijedi istinitost zadane tvrdnje.

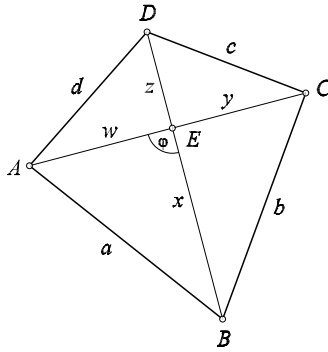
b) Ako u jednakost dokazanu pod a) stavimo $x = 20^\circ$, onda dobijemo:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ / \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \\ \operatorname{tg}^2 60^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \\ 3 &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ. \end{aligned}$$

Zadatak 3B-2. Ako su u konveksnom četverokutu jednaki zbrojevi kvadrata duljina suprotnih stranica, dokažite da su mu dijagonale okomite.

Rješenje.

Označimo dijelove četverokuta prema slici:



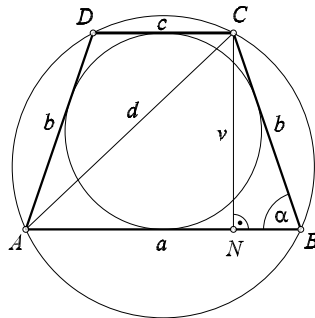
Primjenom kosinusovog poučka u svakom od četiri trokuta na koje dijagonale dijele zadani četverokut dobivamo:

$$\begin{aligned}
 a^2 + c^2 &= b^2 + d^2 \\
 w^2 + x^2 - 2wx \cos \varphi + z^2 + y^2 - 2zy \cos \varphi \\
 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi - \varphi) + z^2 + w^2 - 2zw \cos(\pi - \varphi) \\
 2 \cos \varphi \cdot (wx + zy) &= 2 \cos(\pi - \varphi) \cdot (xy + zw) \\
 (wz + zy + xy + zw) \cos \varphi &= 0 \implies \varphi = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Dakle, dijagonale se sijeku pod pravim kutom.

Zadatak 3B-3. Trapezu $ABCD$ je opisana i upisana kružnica. Omjer visine trapeza i polumjera opisane kružnice je $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Odredite kutove trapeza.

Rješenje. Trapez je tetivni, pa mora biti jednakokračni. Nacrtajmo sliku:



Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a > c$, pa je kut α šiljasti.

Trapez je tangencijalni, pa vrijedi $a + c = 2b$, odnosno $b = \frac{a + c}{2}$.

N je nožište visine spuštene iz vrha C . Onda je $|NB| = \frac{a - c}{2}$, $|AN| = \frac{a + c}{2}$, pa dobivamo $|AN| = b$. Zato za visinu trapeza vrijedi

$$v^2 = b^2 - |NB|^2 = \left(\frac{a + c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - c}{2}\right)^2 = ac.$$

Dijagonalu d možemo izračunati na dva načina. Iz pravokutnog trokuta ANC dobivamo:

$$d^2 = |AN|^2 + v^2 = b^2 + v^2 = \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} + v^2.$$

Drugi prikaz slijedi iz trokuta ABC kojem je d stranica a R polumjer opisane kružnice:

$$d = 2R \sin \alpha.$$

Tako dobivamo

$$4R^2 \sin^2 \alpha = \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} + v^2.$$

Podijelimo s R^2 i iskoristimo zadani uvjet:

$$4 \sin^2 \alpha = \frac{v^2}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + 1 \right) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right).$$

Sredimo ovu jednadžbu i izračunajmo α :

$$4 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \quad / \cdot \frac{3}{2} \sin^2 \alpha,$$

$$6 \sin^4 \alpha = \sin^2 \alpha + 1,$$

$$6 \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha - 1 = 0 \implies (\sin^2 \alpha)_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12}$$

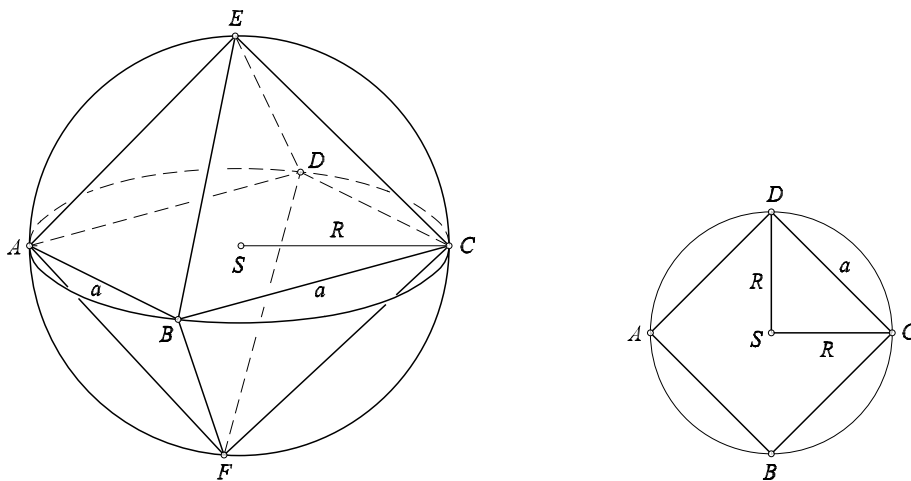
$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \implies \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dobili smo: $\alpha = 45^\circ$. Preostali su kutovi 135° ; 135° i 45° .

Zadatak 3B-4. Pravi oktaedar je tijelo sastavljeno od dvije pravilne četverostrane piramide sa zajedničkom osnovkom i preostala dva vrha simetrična s obzirom na ravninu te osnovke, takvo da svih 12 bridova imaju jednake duljine.

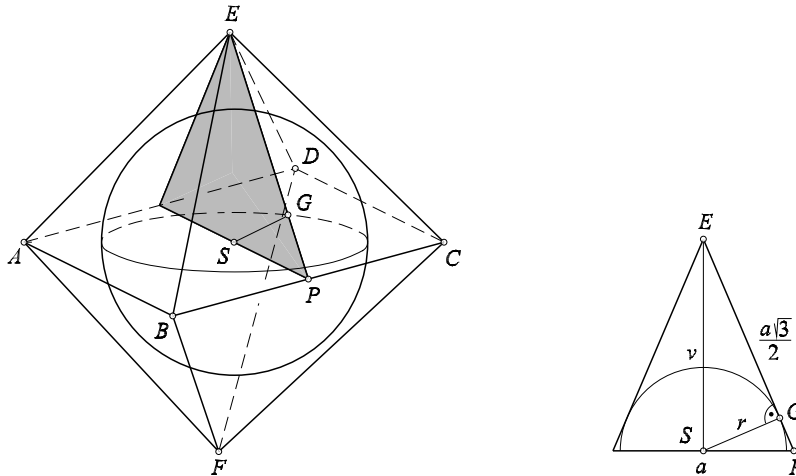
Odredite omjer volumena opisane i upisane kugle pravilnom oktaedru.

Rješenje.



Označimo polumjer veće kugle s R , stranicu oktaedra s a i polumjer manje kugle s r . Računamo:

$$a = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$



Iz trokuta SPE računamo

$$v = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{2}}{2},$$

gdje je $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ visina trokuta BCE . Trokut GSE sličan je trokutu SPE pa je

$$\frac{r}{v} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \implies r = \frac{v}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 2} \cdot R \cdot \sqrt{2} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Omjer volumena opisane i upisane kugle pravilnom oktaedru je

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = 3\sqrt{3}.$$

Zadatak 3B-5. Dokažite da za sve proste brojeve $p > 3$ broj $p^2 + 11$ ima više od šest različitih prirodnih djelitelja (računajući 1 i samog sebe).

Rješenje. Utvrdit ćemo da je za $p > 3$ broj $p^2 + 11$ djeljiv s 12. Broj 12 ima 6 različitih djelitelja: 1, 2, 3, 4, 6 i 12. Kako je $p^2 + 11 > 12$, time će tvrdnja biti dokazana.

Uočimo da je $p^2 + 11 = p^2 - 1 + 12 = (p - 1)(p + 1) + 12$. Od tri uzastopna broja $p - 1, p, p + 1$, jedan mora biti djeljiv s 3. To svakako nije prost broj p , već jedan od brojeva $p - 1$ ili $p + 1$. Osim toga, broj p je neparan, pa su $p - 1$ i $p + 1$ dva uzastopna parna broja. Zato je jedan od njih sigurno djeljiv s 4, a drugi je djeljiv s 2.

Prema tome je $(p - 1)(p + 1)$ djeljiv s 24. Zato je $p^2 + 11$ djeljiv s 12.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija,
3. svibnja 2007.

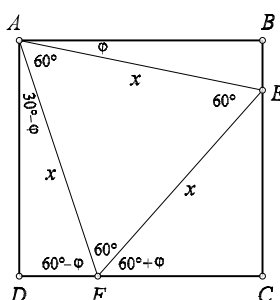
Rješenja

Zadatak 4B-1. U pravokutniku $ABCD$ zadane su točka E na stranici \overline{BC} i točka F na stranici \overline{CD} . Ako je trokut AEF jednakostraničan, dokažite da je da je

$$P_{\triangle ECF} = P_{\triangle ABE} + P_{\triangle AFD}.$$

Rješenje.

Neka je x duljina stranice trokuta, a φ kut $\sphericalangle BAE$.



Površine trokuta su:

$$P_{\triangle ABE} = \frac{x \cos \varphi \cdot x \sin \varphi}{2} = \frac{x^2}{4} \sin 2\varphi$$

$$P_{\triangle AFD} = \frac{x \cos(30^\circ - \varphi) \cdot x \sin(30^\circ - \varphi)}{2} = \frac{x^2}{4} \sin(60^\circ - 2\varphi)$$

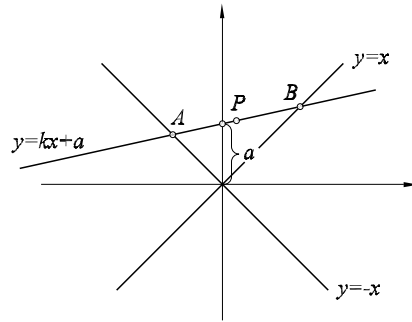
$$P_{\triangle ECF} = \frac{x \cos(60^\circ - \varphi) \cdot x \sin(60^\circ - \varphi)}{2} = \frac{x^2}{4} \sin(120^\circ - 2\varphi)$$

Adicijski teoremi:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ECF} &= \frac{x^2}{4} (\sin 120^\circ \cos 2\varphi - \cos 120^\circ \sin 2\varphi) \\ &= \frac{x^2}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \\ P_{\triangle ABE} + P_{\triangle AFD} &= \frac{x^2}{4} (\sin 60^\circ \cos 2\varphi - \cos 60^\circ \sin 2\varphi + \sin 2\varphi) \\ &= \frac{x^2}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) = P_{\triangle ECF} \end{aligned}$$

Zadatak 4B-2. Pravac kroz $(0, a)$ siječe simetrale kvadranta koordinatnog sustava u točkama A i B . Pokažite da polovište dužine AB leže na hiperboli. Odredite jednadžbu i koordinate središta te hiperbole.

Rješenje.



Odredimo sjecišta pravaca $y = -x$ i $y = x$ s pravcem $y = kx + a$ koji prolazi točkom $(0, a)$:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & -x = kx + a \\ & (-k - 1)x = a \\ & x_A = \frac{-a}{k + 1} \\ & y_A = \frac{a}{k + 1} \\ \text{II.} & x = kx + a \\ & (1 - k)x = a \\ & x_B = \frac{a}{1 - k} \\ & y_B = \frac{a}{1 - k} \end{array}$$

Koordinate polovišta su:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-a + ak + ak + a}{2(1 - k^2)} = \frac{ak}{1 - k^2}, \\ y &= \frac{a - ak + ak + a}{2(1 - k^2)} = \frac{a}{1 - k^2}. \end{aligned}$$

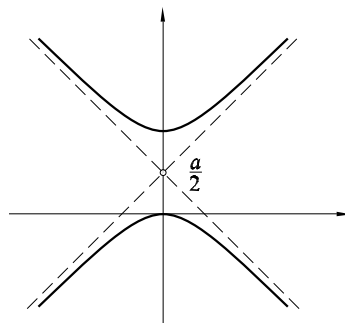
Iz ovih jednažbi trebamo eliminirati k . Dijeljenjem dobivamo $k = \frac{x}{y}$ pa imamo

$$y = \frac{a}{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

Nakon sređivanja dobivamo $y^2 - x^2 = ay$, odnosno

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Točke P opisuju ovu hiperbolu. Koordinate središta hiperbole su $\left(0, \frac{a}{2}\right)$.



Zadatak 4B-3. Dokažite da je najveći koeficijent u razvoju $(a + b)^{2n}$ paran broj.

Rješenje. Dokažimo najprije da najveći koeficijent u binomnom razvoju izraza $(a + b)^{2n}$ iznosi $\binom{2n}{n}$. Omjer dva uzastopna koeficijenta iznosi

$$\binom{2n}{k-1} / \binom{2n}{k} = \frac{(2n) \cdots (2n - k + 2)}{(k-1)!} \cdot \frac{k!}{(2n) \cdots (2n - k + 1)} = \frac{k}{2n - k + 1}.$$

Taj je omjer manji od 1 onda i samo onda kad je

$$k < 2n - k + 1 \iff k < n + \frac{1}{2}.$$

Prema tome, najveći koeficijent će se dobiti za $k = n$.

Sada treba pokazati da je $\binom{2n}{n}$ paran broj.

Binomni koeficijent jednak je zbroju koeficijenata koji mu prethode u Pascalovom trokutu:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} \\ &= \binom{2n-1}{2n-1-(n-1)} + \binom{2n-1}{n} \\ &= \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n} \\ &= 2 \cdot \binom{2n-1}{n} \end{aligned}$$

pa je doista $\binom{2n}{n}$ paran broj.

Zadatak 4B-4. Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Nađite sve takve nizove.

Rješenje. Neka je traženi niz $k + 1, k + 2, \dots, n - 1, n$. Zbroj ovih brojeva jednak je zbroju prvih n brojeva umanjenom za zbroj prvih k brojeva i treba iznositi 1000.

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} &= 1000 \\ n^2 + n - k^2 - k &= 2000 \\ (n-k)(n+k) + (n-k) &= 2000 \\ (n-k)(n+k+1) &= 2000 \\ (n-k)(n+k+1) &= 2^4 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

Vrijedi $n + k + 1 > n - k$. Nadalje ova dva broja su različite parnosti, jer im je zbroj neparan: $(n - k) + (n + k + 1) = 2n + 1$. Ovim uvjetima odgovaraju sljedeće faktorizacije broja 2000:

$$1 \cdot 2000, \quad 5 \cdot 400, \quad 25 \cdot 80, \quad 16 \cdot 125.$$

Promotrimo ova četiri slučaja:

$$\begin{aligned} 1) \quad & n + k + 1 = 2000 \\ & \underline{n - k = 1} \\ & n = k + 1 \\ & k + 1 + k + 1 = 2000 \\ & k = 999, n = 1000. \end{aligned}$$

Dobili smo trivijalni niz: 1000.

$$\begin{aligned} 2) \quad & n + k + 1 = 400 \\ & \underline{n - k = 5} \\ & n = k + 5 \\ & k + 5 + k + 1 = 400 \\ & k = 197, n = 202. \end{aligned}$$

Niz: 198, 199, 200, 201, 202.

$$\begin{aligned} 3) \quad & n + k + 1 = 80 \\ & \underline{n - k = 25} \\ & n = k + 25 \\ & k + 25 + k + 1 = 80 \\ & k = 27, n = 52. \end{aligned}$$

Niz: 28, 29, 30, ..., 52.

$$\begin{aligned} 4) \quad & n + k + 1 = 125 \\ & \underline{n - k = 16} \\ & n = k + 16 \\ & k + 16 + k + 1 = 125 \\ & k = 54, n = 70. \end{aligned}$$

Niz: 55, 56, 57, ..., 70.

Zadatak 4B-5. Ako su $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokažite da je

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

Rješenje. *Prvi način.*

Neka je traženi zbroj jednak S . Kako je

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n = d$$

onda množenjem traženog zbroja s d imamo:

$$\begin{aligned} S \cdot d &= \frac{d}{a_1 a_2} + \frac{d}{a_2 a_3} + \frac{d}{a_3 a_4} + \dots + \frac{d}{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \frac{a_4 - a_3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 \cdot a_{n+1}} \\ &= \frac{a_1 + nd - a_1}{a_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{nd}{a_1 \cdot a_{n+1}} \end{aligned}$$

odakle slijedi tvrdnja.

Drugi način.

Neka je d razlika aritmetičkog niza. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$S_n = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} = \frac{n}{a_1 \cdot a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} \\ &= \frac{na_{n+2} + a_1}{a_1 \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}} = \frac{n(a_{n+1} + d) + a_1}{a_1 \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}} = \frac{na_{n+1} + a_1 + nd}{a_1 \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}} \\ &= \frac{na_{n+1} + a_{n+1}}{a_1 \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}} = \frac{n+1}{a_1 \cdot a_{n+2}}. \end{aligned}$$