Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

3. svibnja 2007.

1. Odredi najmanji cijeli broj x koji zadovoljava jednadžbu

$$x \cdot (|x| - 2) \cdot (x + 2.2) = 0.$$

   Koliki je zbroj svih rješenja te jednadžbe?

2. U prodavaonicu dječjih igračaka stiglo je 10 kutija. U svakoj od njih bio je isti broj lopti, ali različitih boja. Prodavačica je iz prve kutije prodala određeni broj lopti, iz druge dvostruko više, iz treće trostruko više i tako dalje, sve do posljednje kutije iz koje je prodano deseterostruko više nego iz prve, te u kojoj je nakon prodaje ostala samo jedna lopta. U svim kutijama zajedno ostalo je nakon prodaje ukupno 370 lopti.

   Koliko je lopti bilo u svakoj od kutija na početku prodaje?

3. Mineralog je promatrao dva kristala u stadiju formiranja i ravnomjernog porasta masa. Primijetio je da je porast mase prvog kristala za 3 mjeseca jednak porastu mase drugog kristala za 7 mjeseci. Po isteku godine pokazalo se da se masa prvog kristala povećala za 4 posto, a drugog za 5 posto.

   U kojem su odnosu bile mase ovih kristala na početku?

4. Duljina kraka jednakokračnog trokuta dvostruko je veća od duljine osnovice. Izračunaj polumjer tom trokutu upisane kružnice ako je duljina visine na osnovicu 4 cm.

5. Dan je trokut ABC kojemu su $|AB| = 8\,\text{cm}$, $|BC| = 16\,\text{cm}$, $|AC| = 10\,\text{cm}$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka M, tako da okomica iz točke M na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki N, a okomica iz točke M na simetralu kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P, pri čemu je $|CP| = 2|CN|$.

   U kojem omjeru točka M dijeli stranicu $\overline{AB}$?

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Kako je umnožak jednak 0 samo ako je jedan od faktora jednak 0, onda je $x = 0$, $|x| - 2 = 0$ ili $x + 2.2 = 0$.

Zato slijedi $x_1 = 0$.

Iz $|x| - 2 = 0$ slijedi $|x| = 2$ odnosno $x_2 = 2$ i $x_3 = -2$.

Na kraju $x_4 = -2.2$.

Najmanji cijeli broj koji je rješenje jednadžbe je broj -2.

Zbroj svih rješenja je $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 2 + (-2) + (-2.2) = -2.2$.

2. Neka je x broj prodanih lopti iz prve kutije. Brojevi prodanih lopti iz ostalih kutija tada su redom $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $7x$, $8x$, $9x$ i $10x$, što je ukupno $55x$.

Iz posljednje kutije prodano je $10x$ lopti a ostala je jedna lopta. To znači da je u toj kutiji bilo $10x + 1$ lopta. Prema uvjetu zadatka i u svim ostalim kutijama bilo je toliko lopti, pa je ukupan broj lopti u kutijama bio $10(10x + 1)$ lopti.

Dakle, bilo je $10(10x + 1)$ lopti, prodano je $55x$ lopti, a ostalo 370 lopti. Vrijedi jednakost $10(10x + 1) = 55x + 370$. Odavde nalazimo $x = 8$.

U svakoj kutiji na početku prodaje bilo je $10x + 1 = 81$ lopta.

3. Neka su x i y mase kristala na početku.

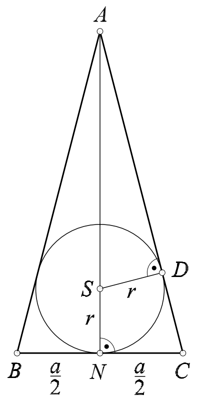
Povećanje mase prvog kristala nakon godinu dana iznosi $\frac{1}{25}x$, a za jedan mjesec $\frac{1}{300}x$.

Povećanje mase drugog kristala nakon godinu dana iznosi $\frac{1}{20}y$, a za jedan mjesec $\frac{1}{240}y$.

Masa prvog kristala za tri se mjeseca povećala za $\frac{1}{100}x$, a masa drugog kristala za sedam mjeseci povećala se za $\frac{7}{240}y$.

Kako su ta povećanja jednaka, izjednačavanje daje $\frac{1}{100}x = \frac{7}{240}y$. Odavde dobivamo konačno traženi odnos masa $x : y = 35 : 12$.

4.



$$\left.\begin{aligned} |AN| &= 4\text{ cm} \\ |SN| &= |SD| = r \end{aligned}\right\} \implies |AS| = 40 - r$$

$\triangle ANC \sim \triangle ADS$ jer su pravokutni sa zajedničkim kutom $\sphericalangle NAC$. Vrijedi:

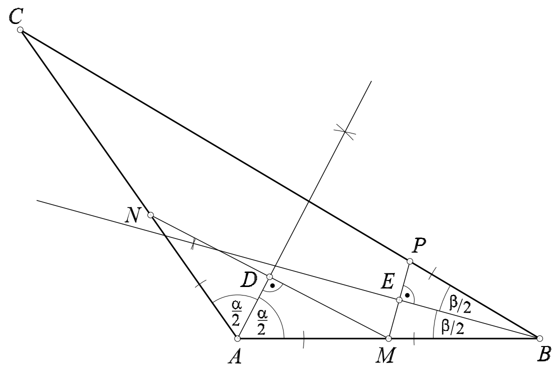
$$\begin{aligned} \frac{|NC|}{|AC|} &= \frac{|DS|}{|AS|} \\ \frac{a}{2} : b &= r : (4 - r). \end{aligned}$$

Zbog $a : b = 1 : 2$, vrijedi $\frac{a}{2} : b = 1 : 4$ pa je:

$$\begin{aligned} 1 : 4 &= r : (4 - r) \\ 4r &= 4 - r \\ 5r &= 4 \\ r &= \frac{4}{5}\text{ cm}. \end{aligned}$$

Duljina polumjera trokutu upisane kružnice je $\frac{4}{5}$ cm.

5.



Kako je $\measuredangle MAD = \measuredangle NAD = \dfrac{\alpha}{2}$, $\measuredangle ADM = \measuredangle ADN = 90^\circ$ i $\overline{AD}$ zajednička stranica trokuta $\triangle AMD$ i $\triangle AND$, prema teoremu K-S-K o sukladnosti slijedi $\triangle AMD \cong \triangle AND$. Iz sukladnosti slijedi $|AM| = |AN|$.

S obzirom da je $\measuredangle MBE = \measuredangle PBE = \dfrac{\beta}{2}$, $\measuredangle BEM = \measuredangle BEP$ i $\overline{BE}$ zajednička stranica trokuta $\triangle BEM$ i $\triangle BEP$, prema teoremu K-S-K o sukladnosti slijedi $\triangle BEM \cong \triangle BEP$. Iz sukladnosti slijedi $|BM| = |BP|$.

Neka je $x = |AN|$, $y = |BP|$ i $n = |CN|$. Tada vrijedi $|CP| = 2|CN| = 2n$, $|AC| = |AN| + |NC| = x + n$ i $|BC| = |BP| + |PC| = y + 2n$.

Dalje je $x + n = 10$ i $y + 2n = 16$ odnosno $x = 10 - n$ i $y = 16 - 2n$.

Budući da je $|AB| = |AM| + |MB| = |AN| + |BP| = x + y$, slijedi

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ (10 - n) + (16 - 2n) &= 8 \\ -3n &= 8 - 10 - 16 \\ -3n &= -18 \\ n &= 6. \end{aligned}$$

Dakle, $x = 10 - n = 4$ i $y = 16 - 2n = 4$.

Na kraju, $|AM| : |MB| = |AN| : |BP| = x : y = 4 : 4 = 1 : 1$.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

3. svibnja 2007.

1. Ako je $\frac{a}{b} - a = \frac{b}{a} + b$ i $a + b \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, koliko je $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$?

2. Izračunaj $\left(2006 - \sqrt{1 + 2008\sqrt{1 + 2007 \cdot 2005}}\right)^2$.

3. Kolona istovrsnih vozila je prošla kroz tunel za 4 minute i 52 sekunde vozeći brzinom od 72 km/h, pri čemu je razmak između vozila bio dvostruko veći od duljine vozila. Nakon istovara tereta, kolona vozila je na povratku prošla tunel za 1 minutu i 42 sekunde brže nego kad je ulazila, vozeći brzinom za 55% većom, pri čemu je razmak između vozila bio trostruko veći od duljine vozila. Da je na povratak krenula samo polovica broja vozila na razmaku četverostruko većem od duljine vozila, prošli bi kroz tunel za 3 minute i 13 sekundi vozeći brzinom za 50% većom od one u dolasku. Kolika je duljina tunela? Kolika je duljina vozila i koliko je vozila bilo u koloni?

4. Izračunaj površinu pravilnog osmerokuta upisanog u krug promjera 16 cm.

5. Polovištem P hipotenuze $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC nacrtana je okomica na $\overline{AB}$ koja katetu $\overline{AC}$ siječe u točki M, a produžetak katete $\overline{BC}$ u točki N. Izrazi duljine stranica a, b i c trokuta ABC pomoću duljina odrezaka $m = |PM|$ i $n = |PN|$.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Transformirajmo zadanu jednakost:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} - \frac{b}{a} &= a + b \\
\frac{a^2 - b^2}{ab} &= a + b \\
\frac{(a-b)(a+b)}{ab} &= a + b \ \Big/ \ : (a+b) \neq 0 \\
\frac{a-b}{ab} &= 1 \\
\frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} &= 1 \\
\frac{1}{b} - \frac{1}{a} &= 1 \\
\frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= -1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\left(2006 - \sqrt{1 + 2008\sqrt{1 + 2007 \cdot 2005}}\right)^2 \\
&= \left(2006 - \sqrt{1 + 2008\sqrt{1 + (2006+1)(2006-1)}}\right)^2 \\
&= \left(2006 - \sqrt{1 + 2008\sqrt{1 + 2006^2 - 1^2)}}\right)^2 \\
&= \left(2006 - \sqrt{1 + 2008\sqrt{2006^2}}\right)^2 \\
&= \left(2006 - \sqrt{1 + 2008 \cdot 2006}\right)^2 \\
&= \left(2006 - \sqrt{1 + (2007+1)(2007-1)}\right)^2 \\
&= \left(2006 - \sqrt{1 + 2007^2 - 1^2}\right)^2 \\
&= \left(2006 - \sqrt{2007^2}\right)^2 \\
&= (2006 - 2007)^2 \\
&= (-1)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. Neka je d_t duljina tunela, d_v duljina vozila i n broj vozila u koloni. Neka su v_1, v_2 i v_3 brzine, a t_1, t_2 i t_3 vremena prolaska kroz tunel u dolasku, povratku odnosno zamišljenom slučaju povratka. Tada vrijedi sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} d_t + nd_v + 2(n-1)d_v &= v_1t_1, \\ d_t + nd_v + 3(n-1)d_v &= v_2t_2, \\ d_t + \frac{n}{2}d_v + 4\left(\frac{n}{2}-1\right)d_v &= v_3t_3. \end{aligned}$$

Lako se odredi da je $v_1 = 20$ m/s, $v_2 = 31$ m/s, $v_3 = 30$ m/s, $t_1 = 292$ sek., $t_2 = 190$ sek., $t_3 = 193$ sek., pa vrijedi

$$\begin{aligned} d_t + nd_v + 2(n-1)d_v &= 5840, \\ d_t + nd_v + 3(n-1)d_v &= 5890, \\ d_t + \frac{n}{2}d_v + 4\left(\frac{n}{2}-1\right)d_v &= 5790. \end{aligned}$$

Ako od druge jednadžbe sustava oduzmemo prvu jednadžbu i od druge jednadžbe oduzmemo treću jednadžbu, tada slijedi

$$\begin{aligned} (n-1)d_v &= 50, \\ \left(\frac{n}{2}+n+1\right)d_v &= 100. \end{aligned}$$

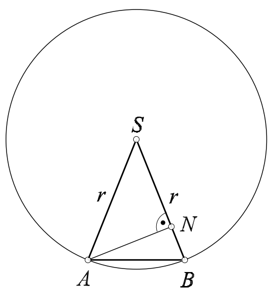
Izrazimo li d_v iz prve jednadžbe te uvrstimo u drugu jednadžbu, slijedi

$$\left(\frac{n}{2}+n+1\right)\cdot\frac{50}{n-1} = 100.$$

Dalje slijedi $n = 6$, $d_v = 10$ i $d_t = 5680$.

Duljina tunela je 5680 m. Duljina vozila u koloni je 10 m, a broj vozila je 6.

4.



Izdvojimo karakterističan trokut pravilnog osmerokuta $\triangle ABS$. Duljine krakova su 8 cm. Točka N pripada $\overline{BS}$ i $\overline{AN} \perp \overline{BS}$, tj. $\overline{AN}$ je visina na krak $\triangle ABS$.

$\sphericalangle ASB = 45°$, pa je $\triangle ANS$ jednakokračan i pravokutan.

Neka je $|AN| = |NS| = v_b$. U $\triangle ANS$ vrijedi $r = v_b\sqrt{2}$, odakle je

$$v_b\sqrt{2} = 8, \quad \text{tj.}$$
$$v_b = 4\sqrt{2}.$$

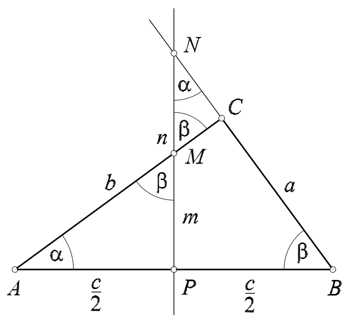
Površina $\triangle ABS$ je

$$P_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\ \text{cm}^2.$$

Površina osmerokuta je

$$P = 8 \cdot P_{\triangle ABS} = 8 \cdot 16\sqrt{2} = 128\sqrt{2}\ \text{cm}^2.$$

5.



Neka su α i β kutovi trokuta ABC. Tada je zbog okomitih krakova i $\sphericalangle PNB = \alpha$, a $\sphericalangle AMP = \sphericalangle CMN = \beta$. Trokuti APM i BPN su slični, pa je $\frac{c}{2} : m = n : \frac{c}{2}$, odakle dobivamo duljinu hipotenuze $c = 2\sqrt{mn}$. Iz trokuta APM dobivamo još da je $|AM| = \sqrt{\frac{c^2}{4} + m^2} = \sqrt{mn + m^2}$.

Trokuti APM i ABC su slični, pa je $m : |AM| = a : c$, odnosno $a|AM| = mc$. Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo duljinu prve katete $a = \frac{2m\sqrt{mn}}{\sqrt{mn + m^2}}$.

Trokuti APM i MCN su slični, pa je $m : |AM| = (b - |AM|) : (n - m)$, odnosno $(b - |AM|)|AM| = m(n - m)$. Sređivanjem dobivamo duljinu druge katete $b = \frac{2mn}{\sqrt{mn + m^2}}$.