Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Skraćivanjem svedite razlomak na najjednostavniji oblik:

$$\frac{bc(c^2-b^2)+ac(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}.$$

Zadatak 2. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$\big||x+2|-2x\big|=\frac{x+3}{2}.$$

Zadatak 3. Neka je p prost broj veći od 3. Dokažite da njegov kvadrat pri dijeljenju brojem 24 daje ostatak 1.

Zadatak 4. Postoji li pravokutan trokut kojemu su duljine kateta cijeli brojevi, a duljina hipotenuze $\sqrt{2006}$?

Zadatak 5. U trokutu ABC duljine stranica su $|BC|=7$, $|AC|=3$, a kut pri vrhu A iznosi $\alpha=30^\circ$. Izračunajte duljinu stranice $\overline{AB}$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}=3+\sqrt{x+7}.$$

Zadatak 2. Ako je $z+\frac{1}{z}=1$, odredite koliko je $z^{2007}+\frac{1}{z^{2007}}$.

Zadatak 3. Ako su oba rješenja jednadžbe $2x^2+mx+2-n=0$ cijeli brojevi različiti od 0, dokažite da je $\frac{m^2+n^2}{4}$ složen cijeli broj!

Zadatak 4. Odredite sve realne parametre m za koje funkcija

$$f(x)=x^2+(m+3)x+(m+2)$$

zadovoljava sljedeća dva uvjeta:
a) $f(x)<0$ za sve $x\in\langle -1,3\rangle$;
b) zbroj recipročnih vrijednosti nultočaka manji je od $\frac{1}{3}$.

Zadatak 5. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa stranicama duljina 20 i 15. Kroz točku C prolazi kružnica sa središtem u vrhu A zadanog pravokutnika. Odredite duljinu one tetive kružnice koja sadrži dijagonalu $\overline{BD}$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Riješite jednadžbu

$$15^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 45x} = 1.$$

Zadatak 2. Za kutove α, β, γ trokuta ABC vrijedi

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Dokažite da je trokut pravokutan.

Zadatak 3. Duljine dviju stranica trokuta su a i b, njima nasuprotni kutovi su α i β, a visina na treću stranicu ima duljinu v.
(a) Ako za kutove vrijedi $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ili $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$, dokažite da je onda

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

(b) Ako ova jednakost vrijedi za neki trokut, dokažite da za njegove kutove vrijedi $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ili $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$.

Zadatak 4. Dana je kocka $ABCDEFGH$ duljine brida a. Izračunajte oplošje i obujam poliedra $ABDFGH$.

Zadatak 5. Obojana drvena kocka prepiljena je na n^3 $(n > 2)$ jednakih kockica. Ako je poznato da je broj kockica, kojima je točno jedna strana obojana, jednak broju kockica kojima niti jedna strana nije obojana, odredite broj n.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Kružnica je upisana u jednakostraničan trokut kojem je duljina stranice 6. Pokažite da za svaku točku T na toj kružnici vrijedi jednakost:

$$|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 45.$$

Zadatak 2. Odredite za koju je vrijednost od x četvrti član razvoja binoma

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$$

20 puta veći od eksponenta binoma ako je binomni koeficijent četvrtog člana pet puta veći od binomnog koeficijenta drugog člana.

Zadatak 3. Neka je $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ niz realnih brojeva različitih od nule takav da vrijedi

$$x_n{}^2 - x_{n+1}x_{n-1} = 1, \qquad \forall n \geq 2.$$

Dokažite da izraz $\dfrac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n}$ poprima istu vrijednost za svaki $n \geq 2$.

Zadatak 4. Dokažite da za svaki prirodni broj n i nenegativan realan broj a vrijedi nejednakost

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}).$$

Zadatak 5. Svi sedmeroznamenkasti brojevi sastavljeni od znamenki 1 do 7 (u svakom broju pojavljuje se svaka od znamenki) poredani su po veličini počevši od najmanjeg. Na kojem se mjestu nalazi broj 3654217?

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija,

29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&\frac{bc(c^2-b^2)+ac(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}\\
&\quad=\frac{bc(c^2-b^2)+a^3c-ac^3+ab^3-a^3b}{b^2c^2(c-b)+a^3c^2-a^2c^3+a^2b^3-a^3b^2}\\
&\quad=\frac{bc(c-b)(c+b)+a^3(c-b)-a(c-b)(c^2+bc+b^2)}{b^2c^2(c-b)+a^3(c-b)(c+b)-a^2(c-b)(c^2+bc+b^2)}\\
&\quad=\frac{(c-b)(bc^2+b^2c+a^3-ac^2-abc-ab^2)}{(c-b)(b^2c^2+a^3c+a^3b-a^2c^2-a^2bc-a^2b^2)} \qquad \textbf{(10 bodova)}\\
&\quad=\frac{a(a-b)(a+b)-c^2(a-b)-bc(a-b)}{a^2b(a-b)-c^2(a-b)(a+b)+a^2c(a-b)}\\
&\quad=\frac{(a-b)(a^2+ab-c^2-bc)}{(a-b)(a^2b-ac^2-bc^2+a^2c)} \qquad \textbf{(5 bodova)}\\
&\quad=\frac{(a-c)(a+c)+b(a-c)}{b(a-c)(a+c)+ac(a-c)}\\
&\quad=\frac{(a-c)(a+c+b)}{(a-c)(ab+bc+ac)}=\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}. \qquad \textbf{(5 bodova)}
\end{aligned}
$$

Napomena. Mogući su i drugi načini faktorizacije. Tada treba bodovati na analogan način.

Zadatak 2. Predznak izraza $|x+2|$ različit je lijevo i desno od točke $x=-2$.

(a) Neka je $x<-2$:

$$
\begin{aligned}
|-x-2-2x| &= \frac{x+3}{2},\\
|3x+2| &= \frac{x+3}{2},
\end{aligned}
$$

Izraz $3x+2$ negativan je na ovom intervalu. Tako dobivamo

$$
\begin{aligned}
-3x-2 &= \frac{x+3}{2},\\
x &= -1.
\end{aligned}
$$

Ovaj broj ne pripada intervalu, pa jednadžba nema rješenja za $x < -2$. **(10 bodova)**

(b) Neka je $x \geq -2$.

$$|x + 2 - 2x| = \frac{x+3}{2},$$
$$|x - 2| = \frac{x+3}{2}.$$

Zbog promjene predznaka izraza $x-2$, ovaj interval dijelimo na dva dijela:

(b1) $-2 \leq x < 2$. Tu je $|x-2| = -x+2$ pa imamo

$$-x + 2 = \frac{x+3}{2},$$
$$x = \frac{1}{3}.$$

Broj pripada intervalu pa predstavlja rješenje jednadžbe. **(5 bodova)**

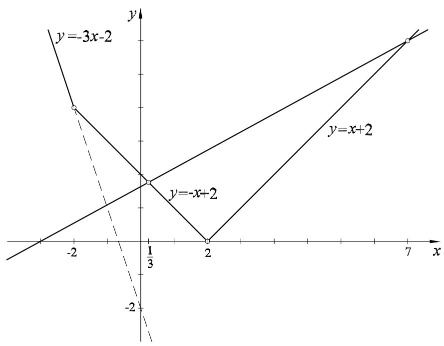
(b2) $2 \leq x$. Tu je $|x-2| = x-2$ pa imamo

$$x - 2 = \frac{x+3}{2},$$
$$x = 7.$$

Broj pripada intervalu pa predstavlja rješenje. **(5 bodova)**

Rješenja jednadžbe su $x = \frac{1}{3}$ i $x = 7$.

Napomena 1. U rješenju se ne traži da bude nacrtan graf funkcije $||x+2| - 2x|$. Onaj tko točno nacrta taj graf (a pogriješi negdje drugdje) može dobiti dodatnih 5 bodova.



Napomena 2. Ukoliko se u slučaju **(a)** ne uoči da je izraz $3x+2$ uvijek negativan i pretpostavi da može biti i $|3x+2| = 3x+2$, dobit će se $x = -\frac{1}{5}$ što nije rješenje jednadžbe.

Ukoliko se uz ispravna rješenja proglase rješenjima i neki od brojeva -1 ili $-\frac{1}{5}$, treba oduzeti 10 bodova (maksimalan broj bodova u tom slučaju je 10).

Zadatak 3. Prvo rješenje: Neka je p prost broj veći od 3. Treba dokazati da je $p^2 - 1$ djeljivo s 24. Imamo $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. **(5 bodova)**

Budući da je p prost broj veći od 3, broj p mora biti neparan, pa su brojevi $p-1$ i $p+1$ uzastopni parni brojevi i jedan od njih je djeljiv s 4. Produkt $(p-1)(p+1)$ je djeljiv s 8. **(5 bodova)**

Od tri uzastopna prirodna broja $p-1$, p, $p+1$ jedan je djeljiv s 3. Kako to nije p, ostaje da je jedan od brojeva $p-1$, $p+1$ djeljiv s 3. Dakle, $(p-1)(p+1)$ je djeljivo s 8 i s 3, pa je $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ djeljivo s 24. **(10 bodova)**

Drugo rješenje: Prost broj veći od 3 je oblika $6k \pm 1$. **(5 bodova)** Stoga je

$$p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 12k(3k \pm 1).$$

(10 bodova) Brojevi k i $3k \pm 1$ su različite parnosti, pa je njihov produkt paran broj, a gornji izraz djeljiv s 24.**(5 bodova)** Time je tvrdnja dokazana.

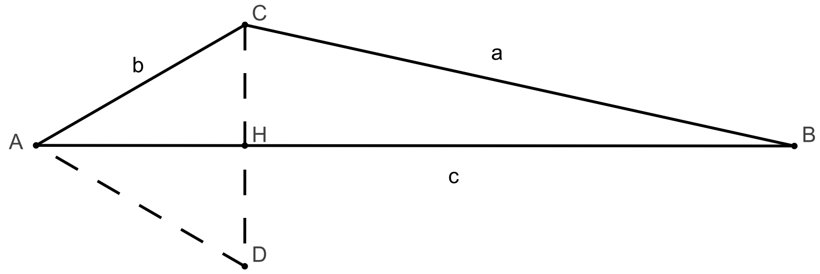
Zadatak 4. Pretpostavimo da takav trokut postoji i da su duljine kateta x i y. Iz Pitagorinog poučka je $x^2 + y^2 = 2006$. Broj 2006 je paran, pa su x i y brojevi iste parnosti.**(3 boda)** Kad bi oba bili parni, x^2, y^2 i $x^2 + y^2$ bi bili djeljivi s 4, a 2006 nije djeljiv s 4. Stoga su oba neparni. **(5 bodova)**

Uvedimo supstitucije $x = 2k+1$, $y = 2l+1$, gdje su k i l prirodni brojevi. **(2 boda)** Jednadžba tada postaje

$$\begin{aligned}
(2k+1)^2 + (2l+1)^2 &= 2006 \\
4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 &= 2006 \\
4k^2 + 4k + 4l^2 + 4l &= 2004 \qquad / : 4 \\
k(k+1) + l(l+1) &= 501. \qquad \textbf{(5 bodova)}
\end{aligned}$$

Za svaki prirodan broj k, točno jedan od brojeva k, $k+1$ je paran. Stoga je lijeva strana gornje jednadžbe paran broj, a desna neparan, pa ta jednadžba, a onda i polazna jednadžba $x^2 + y^2 = 2006$ nemaju cjelobrojnih rješenja. **(5 bodova)**

Zadatak 5. Produljimo visinu $\overline{CH}$ u trokutu ABC preko točke H do točke D tako da je $|CH| = |HD|$.



(5 bodova)

Tada je $\triangle AHC \cong \triangle AHD$ (dvije stranice i kut među njima), pa je $\angle ADC = \angle ACD = 90° - \angle HAC = 90° - \alpha = 60°$. Dakle, trokut ADC je jednakostraničan, pa je $|CH| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{b}{2}$.**(5 bodova)**

Sada primjenom Pitagorinog poučka na trokute AHC i CHB dobivamo:

$$c = |AB| = |AH| + |HB| = \sqrt{|AC|^2 - |CH|^2} + \sqrt{|BC|^2 - |CH|^2}$$
$$= \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{187}{4}} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{187})$$

(10 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija, 29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Napišimo jednadžbu u obliku

$$\sqrt{2x+1} - 3 = \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3}.$$

Da bi korijeni bili definirani, izrazi $x+7$ i $x+3$ moraju biti pozitivni. Onda je $\sqrt{x+7} > \sqrt{x+3}$ pa je desna strana pozitivna. Zato mora i lijeva strana biti pozitivna, odakle slijedi $\sqrt{2x+1} > 3$, odnosno $x > 4$. Kad su obje strane pozitivne, kvadriranjem ćemo dobiti ekvivalentnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
2x+1-6\sqrt{2x+1}+9 &= x+7+x+3-2\sqrt{(x+7)(x+3)},\\
3\sqrt{2x+1} &= \sqrt{(x+7)(x+3)},\\
18x+9 &= x^2+10x+21,\\
x^2-8x+12 &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su $x = 2$ i $x = 6$. Zbog uvjeta $x > 4$, samo je $x = 6$ rješenje početne jednadžbe.**(20 bodova)**

Napomena 1. Učenik ne mora načiniti analizu lijeve i desne strane u prvoj jednakosti. Umjesto toga, može provjeriti zadovoljavaju li dobiveni brojevi početnu jednadžbu. Za $x = 2$ ona glasi

$$\sqrt{5} - 3 = \sqrt{9} - \sqrt{5}$$

pa jednadžba nije zadovoljena, a za $x = 6$ dobivamo istinitu jednakost.

$$\sqrt{13} - 3 = \sqrt{13} - \sqrt{9}$$

Ukoliko se provjera ne učini, već se i $x = 2$ proglasi rješenjem, treba oduzeti 10 bodova.

Napomena 2. Ukoliko se jednadžba kvadrira u početnom obliku, izrazi će se ponešto zakomplicirati. Nakon prvog kvadriranja i sređivanja, dobiva se

$$\sqrt{(2x+1)(x+3)} = 3\sqrt{x+7} - (x-6).$$

Nakon drugog kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$x^2 + 10x - 96 = 6(x-6)\sqrt{x+7}.$$

Sad je potrebno jednadžbu napisati u obliku:

$$(x-6)(x+16) = 6(x-6)\sqrt{x+7}.$$

Odavde slijedi $x = 6$, ili

$$x + 16 = 6\sqrt{x+7}.$$

Sad treba provjeriti da je $x = 6$ rješenje jednadžbe. Iz ostatka kvadriranjem dobivamo

$$x^2 + 32x + 256 = 36(x+7),$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

i odavde $x = 2$, što nije rješenje početne jednadžbe.

Zadatak 2. Prvo rješenje: Uvjet $z + \frac{1}{z} = 1$ zapišemo drukčije:

$$z^2 - z + 1 = 0$$

Množenjem sa $z + 1$ dobivamo

$$z^3 + 1 = 0$$

$$z^3 = -1.$$

(10 bodova) Odavde slijedi

$$z^{2007} = (z^3)^{669} = (-1)^{669} = -1,$$

pa je

$$z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}} = -1 + \frac{1}{-1} = -2.$$

(10 bodova)

Drugo rješenje: Označimo $S_n = z^n + \frac{1}{z^n}$. Iz uvjeta $z + \frac{1}{z} = 1$, kvadriranjem dobivamo

$$S_2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = -1$$

Množenjem ove jednakosti sa $z + \frac{1}{z} = 1$, slijedi

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z + \frac{1}{z} = -1,$$

pa je

$$S_3 = -1 - S_1 = -2.$$ **(5 bodova)**

Na isti način dalje dobivamo

$$S_4 = -2 - S_2 = -1, \qquad S_5 = -1 - S_3 = 1, \qquad S_6 = 1 - S_4 = 2.$$

Dalje će postupak davati već poznate brojeve:

$S_7 = 1 = S_1, \qquad S_8 = -1 = S_2, \qquad S_9 = -2 = S_3, \ \ldots$ **(5 bodova)**

Period u ovom nizu je duljine 6. Zato je

$$S_{2007} = S_3 = -2. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Zadatak 3. Prema Vièteovim formulama slijedi

$$x_1 + x_2 = \frac{-m}{2},$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 - \frac{n}{2}. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Odavde je $m = -2(x_1 + x_2)$ i $n = 2(1 - x_1 \cdot x_2)$.**(3 boda)** Dalje imamo:

$$\frac{m^2 + n^2}{4} = (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1 \cdot x_2)^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2 x_2^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1),$$

a to je složen cijeli broj ako su x_1 i x_2 cijeli brojevi različiti od nule. **(12 bodova)**

Zadatak 4. Prvo rješenje: Budući da se radi o kvadratnoj funkciji s pozitivnim vodećim koeficijentom, uvjet $f(x) < 0$ za sve $x \in \langle -1, 3 \rangle$ ekvivalentan je uvjetima $f(-1) \leq 0$ i $f(3) \leq 0$, koji se mogu napisati kao sustav nejednadžbi:

$$1 - m - 3 + m + 2 \leq 0,$$

$$9 + 3m + 9 + m + 2 \leq 0.$$

Prva nejednadžba je trivijalna ($0 \leq 0$), a druga se svodi na uvjet $m \leq -5$. **(5 bodova)**

Promotrimo sada drugi uvjet,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{1}{3}.$$

Lijevu stranu po Vièteovim formulama možemo pisati kao

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-m - 3}{m + 2}, \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

pa nejednadžba postaje

$$\frac{-m-3}{m+2} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{-m-3}{m+2} - \frac{1}{3} < 0$$

$$\frac{-4m-11}{3(m+2)} < 0.$$

Zbog $m \leq -5$ slijedi $m + 2 < 0$, pa je gornja nejednadžba ekvivalentna sa $-4m - 11 > 0$, što uvijek vrijedi zbog $m \leq -5$. Dakle, $m \in \langle -\infty, -5]$. **(10 bodova)**

Drugo rješenje: Budući da se radi o kvadratnoj funkciji s pozitivnim vodećim koeficijentom, uvjet $f(x) < 0$ za sve $x \in \langle -1, 3\rangle$ ekvivalentan je uvjetima $f(-1) \leq 0$ i $f(3) \leq 0$, koji se mogu napisati kao sustav nejednadžbi:

$$1 - m - 3 + m + 2 \leq 0$$

$$9 + 3m + 9 + m + 2 \leq 0$$

Prva nejednadžba je trivijalna ($0 \leq 0$), a druga se svodi na uvjet $m \leq -5$. **(5 bodova)**

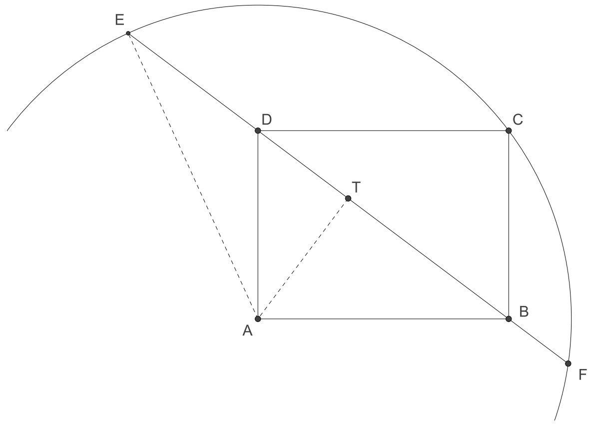
Ako sa x_1 označimo manju nultočku, a sa x_2 veću, gornji uvjet $f(x) < 0$ za sve $x \in \langle -1, 3\rangle$ povlači i $x_1 \leq -1$, $x_2 \geq 3$. Sada slijedi:

$$\frac{1}{x_1} < 0, \qquad \frac{1}{x_2} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

pa je drugi uvjet automatski zadovoljen i rješenje je $m \in \langle -\infty, -5]$. **(15 bodova)**

Zadatak 5. Nacrtajmo sliku: **(3 boda)**



Polumjer kružnice je dijagonala pravokutnika, pa po Pitagorinom poučku njegova duljina iznosi

$$r = |AC| = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25. \qquad \textbf{(2 boda)}$$

Tražimo duljinu tetive $\overline{EF}$. Neka je T njezino polovište. $\overline{AT}$ je okomito na $\overline{EF}$, pa je $\overline{AT}$ visina trokuta BAD. Iz formule za površinu pravokutnog trokuta BAD (ili iz sličnosti trokuta ATD i BAD) dobivamo

$$|AT| = \frac{|AB| \cdot |AD|}{|BD|} = 12. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Sada iz Pitagorinog poučka za trokut ATE slijedi:

$$\left(\frac{|EF|}{2}\right)^2 = |ET|^2 = r^2 - |AT|^2 = 481$$

odnosno $|EF| = 2\sqrt{481}$. **(5 bodova)**

Napomena. (Drugo rješenje): Zadatak se može riješiti i koordinatnom metodom. Pravokutnik postavimo u koordinatni sustav tako da je $A(0,0)$, $B(20,0)$, $C(20,15)$ i $D(0,15)$.

Spomenuta kružnica je skup svih $T(x,y)$ za koje je $|AT| = 25$, odnosno $x^2 + y^2 = 625$. Pravac kroz točke B i D ima jednadžbu $3x + 4y = 60$.

Sada je moguće odrediti njihova sjecišta (krajeve spomenute tetive), i izračunati njihovu udaljenost.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija, 29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Da bi jednadžba imala smisla treba biti $x > 0$. Logaritmiranjem jednadžbe po bazi 5 dobivamo:

$$\log_5 x \cdot \log_5 15 + \log_5 45x \cdot \log_5 x = 0. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Dalje redom imamo:

$$\begin{aligned}
\log_5 x(\log_5 15 + \log_5 45x) &= 0\\
\log_5 x(\log_5 15 + \log_5 45 + \log_5 x) &= 0\\
\log_5 x(\log_5 675 + \log_5 x) &= 0, \qquad \textbf{(5 bodova)}
\end{aligned}$$

Odavde dobivamo dva rješenja:

$$\begin{aligned}
\log_5 x = 0 &\implies x_1 = 1\\
\log_5 x + \log_5 675 = 0 &\implies x_2 = \frac{1}{675}. \qquad \textbf{(10 bodova)}
\end{aligned}$$

Zadatak 2. Izraz $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1$ može se transformirati u umnožak kosinusa na neki od sljedećih načina:

Prvi način:

$$\begin{aligned}
0 &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\gamma\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2[\pi - (\alpha+\beta)]\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta)\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2\\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta\\
&= \cos^2\alpha(1-\sin^2\beta) + \cos^2\beta(1-\sin^2\alpha) - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta\\
&= 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta\\
&= 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\\
&= 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\\
&= -2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma
\end{aligned}$$

Drugi način:

$$
\begin{aligned}
0 &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 \\
&= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \cos^2\gamma - 1 \\
&= \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \cos^2\gamma \\
&= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma \\
&= \cos(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma \\
&= -\cos\gamma\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma \\
&= -\cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma) \\
&= -\cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \\
&= -2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma
\end{aligned}
$$

Sad zaključujemo da neki od kosinusa $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ mora biti jednak nuli, pa je taj kut pravi. **(20 bodova)**

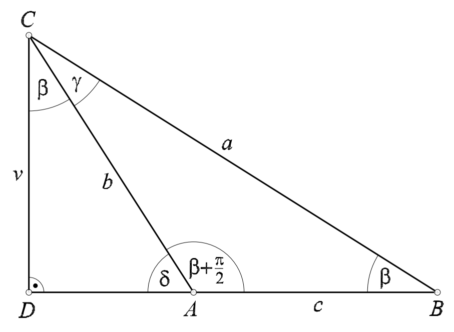
Napomena. Ukoliko se u postupku transformacija ne izvede završni izraz, može se dobiti najviše 5 bodova.

Zadatak 3. Obje se tvrdnje mogu dokazati na više načina. Dokaz tvrdnje **(a)** treba bodovati s 10 bodova, kao i dokaz tvrdnje **(b)**.

Prvi dokaz tvrdnje (a). Ako vrijedi $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, tj. ako je trokut pravokutan, onda je, iz jednakosti površina, $ab = cv$, pa dobivamo

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2b^2} = \frac{c^2}{c^2v^2} = \frac{1}{v^2}. \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Pretpostavimo sad da trokut nije pravokutan. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha > \beta$, t.j. da vrijedi $\alpha = \beta + \dfrac{\pi}{2}$. Nacrtajmo sliku:



(2 boda)

U pravokutnom trokutu ACD za kut δ vrijedi $\delta = \pi - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ pa je kut $\angle ACD = \beta$. **(2 boda)**

Iz pravokutnih trokuta ACD i BCD sada čitamo:

$$\cos\beta = \frac{v}{b}, \qquad \sin\beta = \frac{v}{a}$$

pa je

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{\sin^2\beta}{v^2}+\frac{\cos^2\beta}{v^2}=\frac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{v^2}=\frac{1}{v^2}. \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Drugi dokaz tvrdnje (a). Vrijedi

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{a^2\sin^2\gamma+b^2\sin^2\gamma}{a^2b^2\sin^2\gamma}.$$

Sad koristimo poučak o sinusima i formule za površinu trokuta:

$$\begin{aligned}\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} &\implies a\sin\gamma=c\sin\alpha,\\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} &\implies b\sin\gamma=c\sin\beta,\\ a^2b^2\sin^2\gamma=4P&=c^2v^2.\end{aligned}$$

Dobivamo:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{c^2\sin^2\alpha+c^2\sin^2\beta}{c^2v^2}=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{v^2}.$$

Ako je trokut pravokutan, onda je $\sin\beta=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$. Ako u trokutu vrijedi $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$, onda je $\sin\beta=\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=-\cos\alpha$. Ako pak vrijedi $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$, onda je $\sin\beta=\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha$. U svim je tim situacijama

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

i tvrdnja je dokazana.**(10 bodova)**

Dokaz tvrdnje (b) Postupkom kao u drugom dokazu tvrdnje **(a)**, ili na neki drugi način, treba doći do ekvivalencije

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{v^2} \iff \sin^2\alpha+\sin^2\beta=1. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Ta je relacije ekvivalentna s

$$\sin^2\alpha=\cos^2\beta$$

odnosno

$$\sin\alpha=\cos\beta \quad \text{ili} \quad \sin\alpha=-\cos\beta.$$

Sad treba utvrditi vezu između kutova α i β, imajući u vidu da su to kutovi u trokutu:

$$\sin\alpha=\cos\beta=\sin(\frac{\pi}{2}-\beta) \implies \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta+2k\pi \quad \text{ili} \quad \alpha=\pi-(\frac{\pi}{2}-\beta)+2k\pi.$$

Ovi su uvjeti mogući u trokutu samo za $k=0$. Iz prvog dobivamo $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, a iz drugog $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

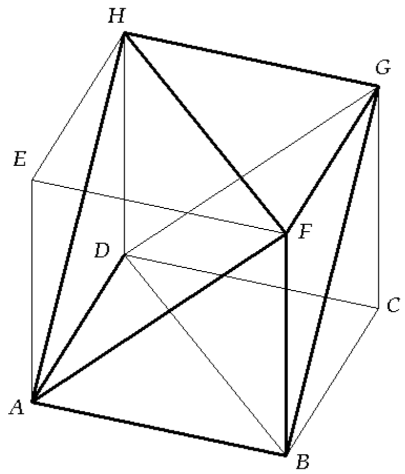
Na isti način,

$$\sin\alpha = -\cos\beta = \sin(\beta - \frac{\pi}{2}) \implies \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad \alpha = \pi - (\beta - \frac{\pi}{2}) + 2k\pi.$$

Drugi uvjet, $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} + k\pi$ nije moguć niti za jedan cjelobrojni k. Iz prvog uvjeta, za $k = 0$, dobivamo $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$.

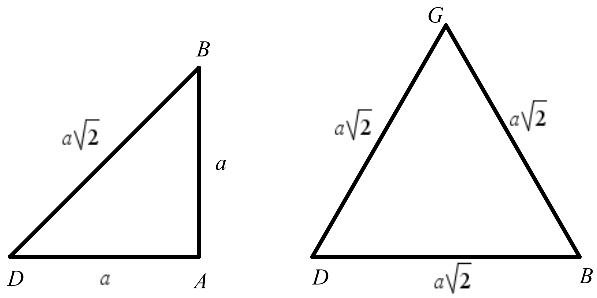
Prema tome, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ vrijedit će samo ako je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ili $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$, što je i trebalo dokazati. **(5 bodova)**

Zadatak 4.



Ispravan crtež: **(2 boda)** .

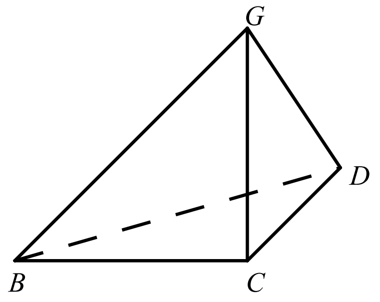
Oplošje se sastoji od 8 trokuta, dva veća jednakostranična: AFH i BDG te šest manjih pravokutnih jednakokračnih:



$$P_1 = \frac{a^2}{2}, \quad P_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$O = 6P_1 + 2P_2 = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3}). \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Volumen poliedra $ABDFGH$ dobit ćemo najlakše ako od volumena kocke oduzmemo volumene sukladnih piramida $BCDG$ i $AEFH$:

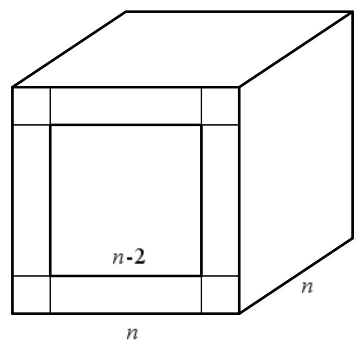


$$V_1 = V_{\text{kocke}} = a^3, \quad V_2 = V_{\text{tetraedra}} = \frac{1}{6}a^3$$

$$V = V_1 - 2V_2 = a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3. \qquad \textbf{(8 bodova)}$$

Zadatak 5.

Na jednoj strani kocke ima $(n-2)^2$ kockica kojima je jedna strana obojana zeleno. Ukupno je takvih kockica $6(n-2)^2$. Neobojanih kockica ima $(n-2)^3$.



$$6(n-2)^2 = (n-2)^3 \;|: (n-2)^2 \neq 0$$
$$6 = n - 2 \implies n = 8 \qquad \textbf{(20 bodova)}$$

Napomena. Dođe li učenik do rješenja isprobavajući za $n = 3, 4, \ldots, 8$ a ne pokaže da je to jedino rješenje, treba oduzeti 10 bodova!

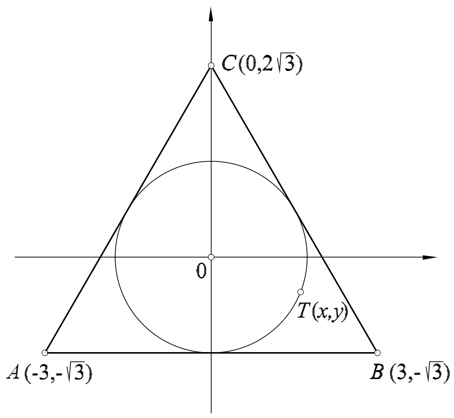
OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija,
29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Zadatak rješavamo analitičkom geometrijom. Trokut možemo smjestiti u koordinatni sustav na različite načine.

(a) Neka središte kružnice bude u ishodištu.



(2 boda)

Visina trokuta je $6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Polumjer kružnice je trećina visine, $r = \sqrt{3}$. Koordinate vrhova su $A(-3, -\sqrt{3})$, $B(3, -\sqrt{3})$, $C(0, 2\sqrt{3})$, a koordinate točke T na kružnici $T(x, y)$. Jednadžba kružnice je

$$x^2 + y^2 = 3. \qquad \textbf{(8 bodova)}\ .$$

Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned}
|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 &= (x+3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 \\
&\quad + x^2 + (y-2\sqrt{3})^2 \\
&= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 \\
&\quad + x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}y + 12 \\
&= 3(x^2 + y^2) + 36 \\
&= 9 + 36 = 45. \qquad \textbf{(10 bodova)}
\end{aligned}$$

(b) Izabere li učenik koordinatni sustav tako da vrh A bude u ishodištu, onda su koordinate vrhova $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(3, 3\sqrt{3})$, središte kružnice je $S(3, \sqrt{3})$. Jednadžba trokutu upisane kružnice je:

$$(\sqrt{3})^2 = (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2,$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2\sqrt{3}y + 9 = 0.$$

Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned}|TA|^2+|TB|^2+|TC|^2 &= (x^2+y^2)+((x-6)^2+y^2)+((x-3)^2+(y-3\sqrt{3})^2)\\ &= 3x^2+3y^2-18x-6\sqrt{3}y+72\\ &= 3(x^2-6x+y^2+2\sqrt{3}y+9)+45=45.\end{aligned}$$

Boduje se na isti način kao u slučaju **(a)**.

Zadatak 2. Iz uvjeta $\binom{m}{3}=5\cdot\binom{m}{1}$ dobivamo:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{6}=5m. \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Kako je m prirodan broj veći ili jednak 3, dijeljenjem s m dobivamo jednadžbu:

$$m^2-3m-28=0,$$

čija su rješenja $m_1=-4$ (koje otpada jer nije prirodan broj) i $m_2=7$. **(7 bodova)** Tada je:

$$\binom{7}{3}(\sqrt{2^{x-1}})^4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^3=20\cdot 7,$$

$$35\cdot 2^{2x-2}\cdot 2^{-x}=140,$$

$$2^{x-2}=4=2^2,$$

$$x=4. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Napomena. Ukoliko se ne odbaci rješenje kvadratne jednadžbe $m_1=-4$, dobit će se odgovarajući $x=-\frac{21}{5}$. Ako učenik ne odbaci to rješenje, treba oduzeti 7 bodova.

Zadatak 3. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Dovoljno je pokazati da jednakost

$$\frac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}}=\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}$$

vrijedi za svaki $n\geq 2$. Ova jednakost je ekvivalentna jednakosti

$$x_{n+2}x_n+{x_n}^2={x_{n+1}}^2+x_{n+1}x_{n-1},$$

$${x_n}^2-x_{n+1}x_{n-1}={x_{n+1}}^2-x_{n+2}x_n,$$

koja vrijedi jer su po uvjetima zadatka obje strane jednake 1. **(20 bodova)**

Zadatak 4. Prvo rješenje: Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} a+1 &\geq 2\sqrt{a}, \\ 2a+1 &\geq 2\sqrt{2a}, \\ &\vdots \\ na+1 &\geq 2\sqrt{na}. \qquad \textbf{(10 bodova)} \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i sređivanjem dobivamo redom:

$$\begin{aligned} (a+1)+(2a+1)+\cdots+(na+1) &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ a(1+2+\cdots+n)+n &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ a\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ n(n+1)a+2n &\geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.**(10 bodova)**

Drugo rješenje: Dokazujemo indukcijom. Za $n=1$ tvrdnja glasi

$$2a+2 \geq 4\sqrt{a} \iff 2(\sqrt{a}-1)^2 \geq 0. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Tada za $n+1$ trebamo dokazati

$$(n+1)(n+2)a+2(n+1) \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}). \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Koristimo pretpostavku indukcije:

$$n(n+1)a+2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}).$$

Zato je

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)a+2(n+1) &= n(n+1)a+2n+2a(n+1)+2 \\ &\geq \left[4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\right]+2a(n+1)+2 \end{aligned}$$

(6 bodova) . Za dovršenje dokaza trebamo dokazati nejednakost

$$2a(n+1)+2 \geq 4\sqrt{a}\sqrt{n+1}.$$

Ovo je nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine. Time je tvrdnja dokazana.**(6 bodova)**

Zadatak 5. Ispred danog se broja nalaze svi brojevi koji počinju znamenkama 1 i 2, a njih ima $2\cdot 6!$. Isto se tako ispred danog broja nalaze i svi brojevi koji počinju znamenkom 3, a druga znamenka im je $1, 2, 4$ ili 5, a takvih ima $4\cdot 5!$. Ako nastavimo tako razmišljati, dobijemo da se ispred danog broja nalazi ukupno $2\cdot 6!+4\cdot 5!+3\cdot 4!+2\cdot 3!+1\cdot 2! = 2006$ brojeva, što znači da se dani broj nalazi na 2007. mjestu. **(20 bodova)**

Napomena. Ukoliko učenik napravi bilo koju pogrešku u prebrojavanju, može dobiti najviše 10 bodova.