

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske  
Agencija za odgoj i obrazovanje  
Hrvatsko matematičko društvo

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2007.

**Zadatak 1.** Dokažite da za međusobno različite realne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  vrijedi

$$\frac{a-b}{2(c-a)(c-b)} + \frac{b-c}{2(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{2(b-a)(b-c)} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}.$$

**Zadatak 2.** Učenik mora pomnožiti 78 s dvoznamenkastim brojem u kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica. Greškom je zamijenio znamenke jedinice i desetice tog broja i dobio umnožak za 2808 manji od pravog. Koliki je stvarni umnožak?

**Zadatak 3.** Brojevi 5777 i 8924 podijeljeni istim prirodnim brojem  $n$  daju redom ostatke 20 i 36. Koji je to broj  $n$ ?

**Zadatak 4.** U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$||x+2| - 2x| = \frac{x+3}{2}.$$

**Zadatak 5.** U trokutu  $ABC$  duljine stranica su  $|BC| = 7$ ,  $|AC| = 3$ , a kut pri vrhu  $A$  iznosi  $\alpha = 30^\circ$ . Izračunajte duljinu stranice  $\overline{AB}$ .

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske  
Agencija za odgoj i obrazovanje  
Hrvatsko matematičko društvo

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2007.

**Zadatak 1.** U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x+7}.$$

**Zadatak 2.** Ako je  $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$  rješenje jednadžbe  $x^3 - 1 = 0$ , koliko je  $(1 - z + z^2) \cdot (1 + z - z^2)$ ?

**Zadatak 3.** U pravokutnom trokutu zbroj kvadrata duljina svih triju stranica iznosi 1682, a opseg trokuta je 70. Izračunajte duljine stranica trokuta.

**Zadatak 4.** Za koje vrijednosti realnog parametra  $a$  funkcija

$$f(x) = a^2x^2 + 2(a+3)x + 1$$

ima dvije različite realne nultočke? Za najmanju cjelobrojnu vrijednost takvog parametra  $a$  izračunajte:

$$x_1^{-3} - x_1^{-2} + x_2^{-3} - x_2^{-2}$$

( $x_1$  i  $x_2$  su nultočke funkcije  $f$ ).

**Zadatak 5.** Duljine stranica trokuta  $ABC$  su  $|AB| = 14$ ,  $|BC| = 15$ ,  $|CA| = 13$ . Na stranici  $\overline{AB}$  uočimo točku  $K$  za koju je  $|AK| = x$ . Izračunaj površinu paralelograma  $AKLM$ , gdje je  $L$  točka na stranici  $\overline{BC}$ , a  $M$  točka na stranici  $\overline{CA}$ . Za koji će  $x$  ta površina biti najveća?

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske  
Agencija za odgoj i obrazovanje  
Hrvatsko matematičko društvo

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija  
29. siječnja 2007.

**Zadatak 1.** Riješite jednadžbu

$$15^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 45x} = 1.$$

**Zadatak 2.** Duljine dviju stranica trokuta su  $a$  i  $b$ , njima nasuprotni kutovi su  $\alpha$  i  $\beta$ , a visina na treću stranicu ima duljinu  $v$ . Ako za kutove vrijedi  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  ili  $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$ , dokažite da je onda

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

**Zadatak 3.** Riješite jednadžbu

$$\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 89^\circ = \cos 2x.$$

**Zadatak 4.** Oko kugle polumjera  $r$  opisan je stožac polumjera baze  $R$ . Koliki je obujam stošca?

**Zadatak 5.** Postoje li prirodni broj  $n \in \mathbf{N}$  i neparan prirodni broj  $m \in \mathbf{N}$  takvi da vrijedi

$$1 + m + m^2 + \dots + m^{2007} = 3^n ?$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske  
Agencija za odgoj i obrazovanje  
Hrvatsko matematičko društvo

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2007.

**Zadatak 1.** Zadani su pravci  $y = 0.75x + 6$ ,  $y = 0.75x + 3$  i točka  $T(7, 24)$ . Nađite jednadžbu pravca koji sadrži zadanu točku, a između zadanih pravaca čini odsječak duljine 4.

**Zadatak 2.** Dokažite da je za svaki prirodan broj  $n$  broj  $\operatorname{Re}\left((1 + i\sqrt{3})^n\right)$  cijeli broj djeljiv s  $2^{n-1}$ .

**Zadatak 3.** Odredite za koju je vrijednost od  $x$  četvrti član razvoja binoma

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$$

20 puta veći od eksponenta binoma ako je binomni koeficijent četvrtog člana pet puta veći od binomnog koeficijenta drugog člana.

**Zadatak 4.** Dokažite da za svaki prirodni broj  $n$  i nenegativan realan broj  $a$  vrijedi nejednakost

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}).$$

**Zadatak 5.** Nađite sva cjelobrojna rješenja sljedećeg sustava jednadžbi:

$$ab + 5 = c,$$

$$bc + 1 = a,$$

$$ca + 1 = b.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

# OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija,  
29. siječnja 2007.

## Rješenja

**Zadatak 1. Prvo rješenje.** Zapišemo li brojnike razlomaka na lijevoj strani ovako

$$\begin{aligned}a - b &= (a - c) + (c - b), \\ b - c &= (b - a) + (a - c), \\ c - a &= (c - b) + (b - a),\end{aligned}$$

vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{a - b}{2(c - a)(c - b)} &= \frac{a - c}{2(c - a)(c - b)} + \frac{c - b}{2(c - a)(c - b)} = -\frac{1}{2(c - b)} + \frac{1}{2(c - a)}, \\ \frac{b - c}{2(a - b)(a - c)} &= \frac{b - a}{2(a - b)(a - c)} + \frac{a - c}{2(a - b)(a - c)} = -\frac{1}{2(a - c)} + \frac{1}{2(a - b)}, \\ \frac{c - a}{2(b - c)(b - a)} &= \frac{c - b}{2(b - c)(b - a)} + \frac{b - a}{2(b - c)(b - a)} = -\frac{1}{2(b - a)} + \frac{1}{2(b - c)}.\end{aligned}$$

Zbrojimo jednakosti iz prethodna tri reda, pa dobivamo

$$\begin{aligned}&\frac{a - b}{2(c - a)(c - b)} + \frac{b - c}{2(a - b)(a - c)} + \frac{c - a}{2(b - a)(b - c)} \\ &= -\frac{1}{2(c - b)} + \frac{1}{2(c - a)} - \frac{1}{2(a - c)} + \frac{1}{2(a - b)} - \frac{1}{2(b - a)} + \frac{1}{2(b - c)} \\ &= \frac{2}{2(c - a)} + \frac{2}{2(a - b)} + \frac{2}{2(b - c)} = \frac{1}{a - b} + \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a}.\end{aligned}$$

**(20 bodova)**

**Drugo rješenje.** Pomnožimo jednakost sa zajedničkim nazivnikom lijeve strane:  $2(a - b)(b - c)(c - a)$ : **(2 boda)**

$$\begin{aligned}\frac{a - b}{2(c - a)(c - b)} + \frac{b - c}{2(a - b)(a - c)} + \frac{c - a}{2(b - a)(b - c)} &= \frac{1}{a - b} + \frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - a}, \\ -(a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 &= 2(b - c)(c - a) \\ &\quad + 2(a - b)(c - a) + 2(a - b)(b - c), \text{ (8 bodova)} \\ -2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &= 2(bc - ab + ca - c^2 \\ &\quad + ac - a^2 + ab - bc + ab - ac - b^2 + bc).\end{aligned}$$

Lijeva strana jednaka je desnoj. Početnu jednakost množili smo brojem različitim od nule, pa je i ona istinita. **(10 bodova)**

**Zadatak 2. Prvo rješenje:** Označimo nepoznati broj s  $\overline{ab}$ . Prema uvjetu zadatka je

$$78 \cdot \overline{ab} - 78 \cdot \overline{ba} = 2808 \quad (5 \text{ bodova})$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} \overline{ab} - \overline{ba} &= 36, \\ 10a + b - 10b - a &= 36, \\ a - b &= 4. \end{aligned} \quad (8 \text{ bodova})$$

Iz ove jednakosti i iz veze  $a = 3b$  dobivamo  $a = 6$ ,  $b = 2$ . (5 bodova)  
Točan umnožak je 4836. (2 boda)

**Drugo rješenje:** Neka je početni broj u kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica  $3x \cdot 10 + x = 31x$ , gdje je  $x$  znamenka jedinica. Broj koji se dobije zamjenom znamenke jedinica i desetice je  $x \cdot 10 + 3x = 13x$ . (5 bodova)

Iz uvjeta zadatka imamo da je  $78 \cdot 31x - 78 \cdot 13x = 2808$ , tj.  $1404x = 2808$ , pa je  $x = 2$ . (10 bodova)

Ispravni broj je 62, a stvarni umnožak je  $78 \cdot 62 = 4836$ . (5 bodova)

**Treće rješenje:** Dvoznamenkasti broj u kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica je jedan od brojeva 31, 62, 93. Provjeravamo svaku od tri mogućnosti.

$$78 \cdot 31 - 78 \cdot 13 = 2418 - 1014 = 1404,$$

$$78 \cdot 62 - 78 \cdot 26 = 4836 - 2028 = 2808,$$

$$78 \cdot 93 - 78 \cdot 39 = 7254 - 3042 = 4212.$$

Dakle, dvoznamenkasti broj kojim je učenik trebao množiti je 62, a točan umnožak 4836. (20 bodova)

**Zadatak 3.** Iz uvjeta zadatka slijedi da postoje prirodni brojevi  $a$  i  $b$  takvi da je  $5777 = a \cdot n + 20$  i  $8924 = b \cdot n + 36$ . (5 bodova) . Odavde dobivamo  $a \cdot n = 5757$  i  $b \cdot n = 8888$ . Oduzmemo li prethodne dvije jednakosti dobivamo  $(b - a)n = 3131 = 101 \cdot 31$ . (5 bodova)

Uočimo da je  $n$  prirodan broj veći od 36 (djelitelj je uvijek veći od ostatka), koji dijeli 3131. Brojevi 101 i 31 su prosti, pa su jedini djelitelji broja 3131 brojevi 1, 31, 101 i 3131. Uz to,  $n$  mora dijeliti i brojeve 5757 i 8888, pa vidimo da  $n$  može biti samo 101. (10 bodova)

**Napomena.** Učenik može do rješenja doći promatranjem faktorizacija brojeva 5757 i 8888: Drugi dio zadatka se onda boduje ovako:

$$a \cdot n = 5757 = 57 \cdot 101 = 3 \cdot 19 \cdot 101,$$

$$b \cdot n = 8888 = 8 \cdot 1111 = 8 \cdot 11 \cdot 101.$$

(10 bodova) Broj 101 jedini je zajednički faktor ovih brojeva veći od 1, pa je taj broj rješenje zadatka. (5 bodova)

**Zadatak 4.** Predznak izraza  $|x+2|$  različit je lijevo i desno od točke  $x = -2$ .

(a) Neka je  $x < -2$ :

$$\begin{aligned}|-x-2-2x| &= \frac{x+3}{2}, \\|3x+2| &= \frac{x+3}{2},\end{aligned}$$

Izraz  $3x+2$  negativan je na ovom intervalu. Tako dobivamo

$$\begin{aligned}-3x-2 &= \frac{x+3}{2}, \\x &= -1.\end{aligned}$$

Ovaj broj ne pripada intervalu, pa jednažba nema rješenja za  $x < -2$ .

**(10 bodova)**

(b) Neka je  $x \geq -2$ .

$$\begin{aligned}|x+2-2x| &= \frac{x+3}{2}, \\|x-2| &= \frac{x+3}{2}.\end{aligned}$$

Zbog promjene predznaka izraza  $x-2$ , ovaj interval dijelimo na dva dijela:

(b1)  $-2 \leq x < 2$ . Tu je  $|x-2| = -x+2$  pa imamo

$$\begin{aligned}-x+2 &= \frac{x+3}{2}, \\x &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Broj pripada intervalu pa predstavlja rješenje jednažbe. **(5 bodova)**

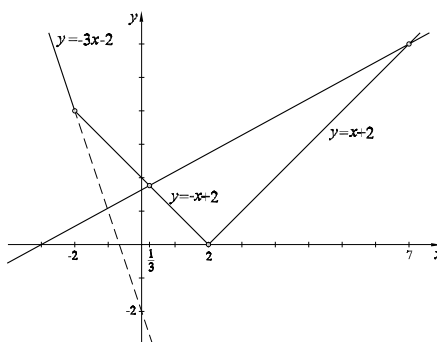
(b2)  $2 \leq x$ . Tu je  $|x-2| = x-2$  pa imamo

$$\begin{aligned}x-2 &= \frac{x+3}{2}, \\x &= 7.\end{aligned}$$

Broj pripada intervalu pa predstavlja rješenje. **(5 bodova)**

Rješenja jednažbe su  $x = \frac{1}{3}$  i  $x = 7$ .

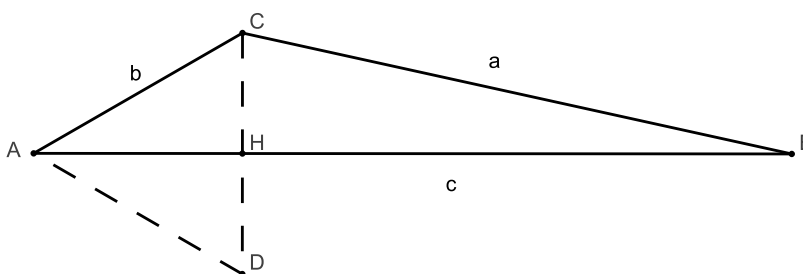
**Napomena 1.** U rješenju se ne traži da bude nacrtan graf funkcije  $||x+2|-2x|$ . Onaj tko točno nacрта taj graf (a pogriješi negdje drugdje) može dobiti dodatnih 5 bodova.



**Napomena 2.** Ukoliko se u slučaju (a) ne uoči da je izraz  $3x + 2$  uvijek negativan i pretpostavi da može biti i  $|3x + 2| = 3x + 2$ , dobit će se  $x = -\frac{1}{5}$  što nije rješenje jednadžbe. Za ovakav postupak ne treba oduzimati bodove.

**Napomena 3.** Ukoliko se uz ispravna rješenja proglase rješenjima i neki od brojeva  $-1$  ili  $-\frac{1}{5}$ , treba oduzeti 10 bodova (maksimalan broj bodova u tom slučaju je 10).

**Zadatak 5.** Produljimo visinu  $\overline{CH}$  u trokutu  $ABC$  preko točke  $H$  do točke  $D$  tako da je  $|CH| = |HD|$ .



**(5 bodova)**

Tada je  $\triangle AHC \cong \triangle AHD$  (dvije stranice i kut među njima), pa je  $\angle ADC = \angle ACD = 90^\circ - \angle HAC = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$ . Dakle, trokut  $ADC$  je jednakostraničan, pa je  $|CH| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{b}{2}$ . **(5 bodova)**

Sada primjenom Pitagorinog poučka na trokute  $AHC$  i  $CHB$  dobivamo:

$$\begin{aligned} c &= |AB| = |AH| + |HB| = \sqrt{|AC|^2 - |CH|^2} + \sqrt{|BC|^2 - |CH|^2} \\ &= \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{187}{4}} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{187}) \end{aligned}$$

**(10 bodova)**



# OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija,  
29. siječnja 2007.

## Rješenja

**Zadatak 1.** Napišimo jednadžbu u obliku

$$\sqrt{2x+1} - 3 = \sqrt{x+7} - \sqrt{x+3}.$$

Da bi korijeni bili definirani, moraju izrazi  $x+7$  i  $x+3$  biti pozitivni. Onda je  $\sqrt{x+7} > \sqrt{x+3}$  pa je desna strana pozitivna. Zato mora i lijeva strana biti pozitivna, odakle slijedi  $\sqrt{2x+1} > 3$ , odnosno  $x > 4$ . Kad su obje strane pozitivne, kvadriranjem ćemo dobiti ekvivalentnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}2x + 1 - 6\sqrt{2x+1} + 9 &= x + 7 + x + 3 - 2\sqrt{(x+7)(x+3)}, \\3\sqrt{2x+1} &= \sqrt{(x+7)(x+3)}, \\18x + 9 &= x^2 + 10x + 21, \\x^2 - 8x + 12 &= 0.\end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su  $x = 2$  i  $x = 6$ . Zbog uvjeta  $x > 4$ , samo je  $x = 6$  rješenje početne jednadžbe. **(20 bodova)**

**Napomena 1.** Učenik ne mora načiniti analizu lijeve i desne strane u prvju jednakosti. Umjesto toga, može provjeriti zadovoljavaju li dobiveni brojevi početnu jednadžbu. Za  $x = 2$  ona glasi

$$\sqrt{5} - 3 = \sqrt{9} - \sqrt{5}$$

pa jednadžba nije zadovoljena, a za  $x = 6$  dobivamo istinitu jednakost.

$$\sqrt{13} - 3 = \sqrt{13} - \sqrt{9}$$

Ukoliko se provjera ne učini, već se i  $x = 2$  proglašuje rješenjem, treba oduzeti 10 bodova.

**Napomena 2.** Ukoliko se jednadžba kvadrira u početnom obliku, izrazi će se ponešto zakomplicirati. Nakon prvog kvadriranja i sređivanja, dobiva se

$$\sqrt{(2x+1)(x+3)} = 3\sqrt{x+7} - (x-6).$$

Nakon drugog kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$x^2 + 10x - 96 = 6(x-6)\sqrt{x+7}.$$

Sad je potrebno jednadžbu napisati u obliku:

$$(x-6)(x+16) = 6(x-6)\sqrt{x+7}.$$

Odavde slijedi  $x = 6$ , ili

$$x + 16 = 6\sqrt{x + 7}.$$

Sad treba provjeriti da je  $x = 6$  rješenje jednadžbe. Iz ostatka kvadriranjem dobivamo

$$\begin{aligned}x^2 + 32x + 256 &= 36(x + 7), \\x^2 - 4x + 4 &= 0\end{aligned}$$

i odavde  $x = 2$ , što nije rješenje početne jednadžbe.

**Zadatak 2. Prvo rješenje:** Iz  $x^3 - 1 = 0$  slijedi  $x = 1$  ili  $x^2 + x + 1 = 0$ . **(3 boda)** Rješenja jednadžbe iz skupa  $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$  su ona koja zadovoljavaju ovu drugu jednadžbu. Stoga možemo pisati  $z^2 = -z - 1$ , **(5 bodova)** pa uvrštavanjem toga u zadani izraz dobivamo:

$$\begin{aligned}(1 - z + z^2) \cdot (1 + z - z^2) &= (1 - z - z - 1) \cdot (-z^2 - z^2) = \\&= -2z \cdot (-2z^2) = 4z^3 = 4. \quad \textbf{(12 bodova)}\end{aligned}$$

**Drugo rješenje:** Iz uvjeta dobivamo:

$$\begin{aligned}z^3 - 1 &= 0, \\(z - 1)(z^2 + z + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Prema pretpostavci,  $z$  ne može biti jednak jedinici, pa vrijedi  $z^2 + z + 1 = 0$ . **(3 boda)** Odavde dobivamo

$$z = z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ili} \quad z = z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**(2 boda)**

Korištenjem  $z^3 = 1$  i  $z^4 = z$  zapišimo početni izraz kao:

$$\begin{aligned}(1 - z + z^2) \cdot (1 + z - z^2) &= 1 + z - z^2 - z - z^2 + z^3 + z^2 + z^3 - z^4 \\&= 1 - z^2 + 2z^3 - z^4 = 3 - (z + z^2).\end{aligned}$$

**(10 bodova)** U prvom slučaju je  $z^2 = z_1^2 = z_2$ , u drugom  $z^2 = z_2^2 = z_1$ , a u oba slučaja polazni izraz je jednak  $3 - (z + z^2) = 3 - (z_1 + z_2) = 3 - (-1) = 4$ . **(5 bodova)**

**Napomena.** Učenici će pokušati izračunati izraz direktnim računanjem, nakon što odrede  $z_1$  i  $z_2$ . Ukoliko račun bude točan, treba dodijeliti sve bodove za zadatak. Ako se račun provjeri samo za jednu od tih nultočaka, treba oduzeti 5 bodova.

**Zadatak 3.** Ako duljine kateta trokuta označimo sa  $a$  i  $b$ , a duljinu hipotenuze sa  $c$ , onda uvjete zadatka možemo zapisati kao sustav:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= 1682, \\a + b + c &= 70, \\a^2 + b^2 &= c^2. \quad \text{(5 bodova)}\end{aligned}$$

Uvrštavanjem treće jednadžbe u prvu dobivamo  $2c^2 = 1682$ , tj.  $c = 29$ .  
**(5 bodova)**

Početni sustav sada postaje:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= 841, \\a + b &= 70 - 29 = 41.\end{aligned}$$

Ukoliko iz druge jednadžbe sada izrazimo  $b = 41 - a$  i uvrstimo u prvu, dobivamo

$$a^2 + (41 - a)^2 = 841,$$

tj. nakon sređivanja

$$\begin{aligned}2a^2 - 82a + 840 &= 0 \\a^2 - 41a + 420 &= 0. \quad \text{(5 bodova)}\end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$a_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1680}}{2} = \frac{41 \pm 1}{2},$$

pa su rješenja početnog sustava  $a_1 = 21$ ,  $b_1 = 20$  i  $a_2 = 20$ ,  $b_2 = 21$ . Dakle, traženi trokut ima hipotenuzu duljine 29 i katete duljina 20 i 21.

**(5 bodova)**

**Zadatak 4.** Da bi funkcija  $f(x) = a^2x^2 + 2(a+3)x + 1$  mogla imati dvije nultočke, mora biti kvadratna funkcija, tj. mora vrijediti  $a \neq 0$ . **(3 boda)**  
 Da bi te dvije nultočke bile realne i različite, diskriminanta mora biti strogo veća od 0, tj.

$$\begin{aligned} (2(a+3))^2 - 4a^2 &> 0 \\ 4a^2 + 4 \cdot 6a + 4 \cdot 9 - 4a^2 &> 0 \\ 6a + 9 &> 0 \\ a &> \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

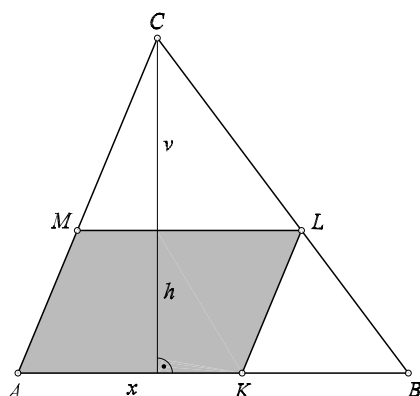
Stoga za parametar  $a$  mora vrijediti  $a \in \langle -3/2, 0 \rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle$ . **(5 bodova)**

Najmanji cjelobrojni  $a$  koji zadovoljava taj uvjet je  $a = -1$ , za koji kvadratna funkcija postaje  $f(x) = x^2 + 4x + 1$ . **(2 boda)** Njezine nultočke, po Vièteovim formulama, zadovoljavaju:  $x_1 + x_2 = -4$ ,  $x_1 \cdot x_2 = 1$ . Računamo:

$$\begin{aligned} x_1^{-3} - x_1^{-2} + x_2^{-3} - x_2^{-2} &= \frac{x_1^3 + x_2^3 - x_1x_2^3 - x_1^3x_2}{(x_1x_2)^3} = \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1x_2)^3} = \\ &= \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^3} = \\ &= \frac{(-4)^3 - 3 \cdot 1 \cdot (-4) - 1 \cdot ((-4)^2 - 2 \cdot 1)}{1^3} = \\ &= -64 + 12 - 14 = -66. \quad \textbf{(10 bodova)} \end{aligned}$$

**Napomena.** Ako učenik izračuna nultočke kvadratne funkcije i zatim odredi vrijednost izraza neposrednim računom, treba priznati postupak. Ukoliko pri računanju pogriješi u postupku, treba mu oduzeti najmanje 5 bodova.

**Zadatak 5. Prvo rješenje:** Nacrtajmo sliku: (2 boda)



Iz omjera

$$\frac{v-h}{v} = \frac{x}{c}$$

slijedi

$$h = v \left(1 - \frac{x}{c}\right). \quad (5 \text{ bodova})$$

Visinu trokuta računamo preko Heronove formule:

$$\frac{c \cdot v}{2} = P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Oдавde:

$$7v = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = 84$$

pa je  $v = 12$ . (5 bodova)

Tako smo dobili površinu paralelograma  $AKLM$ :

$$p(x) = 12x \left(1 - \frac{x}{14}\right). \quad (3 \text{ boda})$$

U ovisnosti o  $x$ , ovo je kvadratna funkcija. Njezin vodeći koeficijent je negativan, a nultočke su  $x = 0$  i  $x = 14$ . Zato se maksimum postiže za  $x = 7$ . (5 bodova)

Taj je maksimum jednak 42 (polovina površine trokuta).

**Drugo rješenje:** Odgovarajuća slika: (2 boda)

Površine sličnih trokuta  $ABC$ ,  $MLC$ ,  $KBL$  odnose se kao kvadrati duljina njihovih odgovarajućih stranica  $\overline{AB}$ ,  $\overline{ML}$ ,  $\overline{KB}$ . (3 boda)

Dakle

$$P(ABC) : P(MLC) : P(KBL) = c^2 : x^2 : (c-x)^2$$

Označimo površinu trokuta s  $P$ . Dobili smo

$$P(MLC) = \frac{x^2}{c^2}P, \quad P(KBL) = \frac{(c-x)^2}{c^2}P. \quad (3 \text{ boda})$$

Zato je površina paralelograma

$$P(AKLM) = P(ABC) - P(MLC) - P(KBL) \quad (2 \text{ boda})$$

Odavde:

$$\begin{aligned} P(AKLM) &= P\left(1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{(x-c)^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{c^2 - x^2 - (c-x)^2}{c^2} \cdot P \\ &= \frac{2x(c-x)}{c^2} \cdot P \quad (5 \text{ bodova}) \end{aligned}$$

Maksimum kvadratne  $2x(c-x)$  funkcije postiže se za  $x = \frac{c}{2} = 7$ . Površina paralelograma je  $\frac{1}{2}P$ . **(5 bodova)** .

Pretpostavlja se da će učenik u nekom trenutku izračunati površinu trokuta  $P$ , iako to nije bitno za rješenje zadatka, niti za bodovanje.

## OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija,  
29. siječnja 2007.

### Rješenja

**Zadatak 1.** Da bi jednadžba imala smisla treba biti  $x > 0$ . Logaritmiranjem jednadžbe po bazi 5 dobivamo:

$$\log_5 x \cdot \log_5 15 + \log_5 45x \cdot \log_5 x = 0. \quad (5 \text{ bodova})$$

Dalje redom imamo:

$$\begin{aligned} \log_5 x (\log_5 15 + \log_5 45x) &= 0 \\ \log_5 x (\log_5 15 + \log_5 45 + \log_5 x) &= 0 \\ \log_5 x (\log_5 675 + \log_5 x) &= 0, \quad (5 \text{ bodova}) \end{aligned}$$

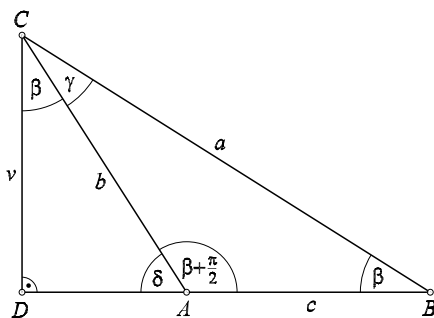
Odavde dobivamo dva rješenja:

$$\begin{aligned} \log_5 x = 0 &\implies x_1 = 1 \\ \log_5 x + \log_5 675 = 0 &\implies x_2 = \frac{1}{675}. \quad (10 \text{ bodova}) \end{aligned}$$

**Zadatak 2. Prvo rješenje:** Ako vrijedi  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , tj. ako je trokut pravokutan, onda je, iz jednakosti površina,  $ab = cv$ , pa dobivamo

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{c^2 v^2} = \frac{1}{v^2}. \quad (5 \text{ bodova})$$

Pretpostavimo sad da trokut nije pravokutan. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $\alpha > \beta$ , t.j. da vrijedi  $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$ . Nacrtajmo sliku:



U pravokutnom trokutu  $ACD$  za kut  $\delta$  vrijedi  $\delta = \pi - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$  pa je kut  $\angle ACD = \beta$ . **(5 bodova)**

Iz pravokutnih trokuta  $ACD$  i  $BCD$  sada čitamo:

$$\cos \beta = \frac{v}{b}, \quad \sin \beta = \frac{v}{a}$$

pa je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\sin^2 \beta}{v^2} + \frac{\cos^2 \beta}{v^2} = \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{v^2} = \frac{1}{v^2}. \quad \text{(10 bodova)}$$

**Drugo rješenje.** Vrijedi

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma}{a^2 b^2 \sin^2 \gamma}.$$

Sad koristimo poučak o sinusima i formule za površinu trokuta:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \implies a \sin \gamma = c \sin \alpha, \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \implies b \sin \gamma = c \sin \beta, \\ a^2 b^2 \sin^2 \gamma &= 4P = c^2 v^2. \end{aligned}$$

Dobivamo:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{c^2 \sin^2 \alpha + c^2 \sin^2 \beta}{c^2 v^2} = \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}{v^2}.$$

**(15 bodova)** Ako je trokut pravokutan, onda je  $\sin \beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ . Ako u trokutu vrijedi  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ , onda je  $\sin \beta = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos \alpha$ . Ako vrijedi pak  $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ , onda je  $\sin \beta = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$ . U svim je tim situacijama

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

i tvrdnja je dokazana. **(5 bodova)**

**Zadatak 3.** Za svaki  $\alpha$  vrijedi

$$\log \operatorname{tg} \alpha + \log \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \log \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin(90 - \alpha)}{\cos(90 - \alpha)} \right) = \log 1 = 0.$$

Također,  $\log \operatorname{tg} 45^\circ = \log 1 = 0$ . Zato je

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 89^\circ &= 0, \\ \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 88^\circ &= 0, \\ &\vdots \\ \log \operatorname{tg} 44^\circ + \log \operatorname{tg} 46^\circ &= 0, \\ \log \operatorname{tg} 45^\circ &= 0 \end{aligned}$$



pa je lijeva strana jednadžbe jednaka nuli. (15 bodova)

$$0 = \cos 2x$$

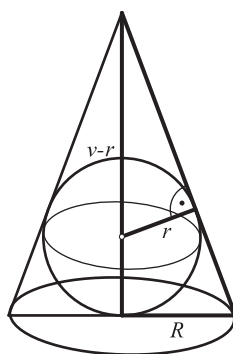
$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

(5 bodova)

**Napomena.** Ukoliko učenik previdi da srednji član u sumi nema svog para, treba oduzeti 5 bodova.

**Zadatak 4.** Nacrtajmo sliku:(3 boda)



Iz sličnosti trokuta sa slike izlazi:

$$r : (v - r) = R : \sqrt{v^2 + R^2}$$

$$\frac{r^2}{(v - r)^2} = \frac{R^2}{R^2 + v^2} \quad (5 \text{ bodova})$$

Odavde trebamo izračunati visinu  $v$ :

$$r^2(R^2 + v^2) = R^2(v^2 - 2vr + r^2)$$

$$R^2r^2 + v^2r^2 = R^2v^2 - 2vrR^2 + R^2r^2$$

$$v^2(r^2 - R^2) + 2vrR^2 = 0$$

$$v(v(r^2 - R^2) + 2rR^2) = 0$$

$$v \neq 0 \implies v = \frac{2rR^2}{R^2 - r^2} \quad (7 \text{ bodova})$$

Sad dobivamo

$$V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{rR^4}{R^2 - r^2}. \quad (5 \text{ bodova})$$

**Zadatak 5.**  $m$  je neparan pa je  $m^k$  također neparan. Stoga je zbroj  $1 + m + m^2 + \dots + m^{2007}$  paran jer ima parno mnogo neparnih pribrojnika. Međutim  $3^n$  je neparan. Jednadžba nema rješenja. Znači da ne postoji neparan prirodan broj  $m$  i prirodan broj  $n$  koji bi zadovoljavali danu jednakost. **(20 bodova)**

# OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija,  
29. siječnja 2007.

## Rješenja

**Zadatak 1.** Traženi pravac ima jednadžbu

$$y - 24 = k(x - 7)$$

za neki realni broj  $k$ . **(3 boda)**

Rješavanjem dvaju sustava dobivamo da su točke presjeka ovog pravca sa zadanim pravcima  $T_1\left(\frac{7k-18}{k-0.75}, \frac{11.25k-18}{k-0.75}\right)$  i  $T_2\left(\frac{7k-21}{k-0.75}, \frac{8.25k-18}{k-0.75}\right)$ . **(7 bodova)**

Iz uvjeta da udaljenost točaka  $T_1$  i  $T_2$  iznosi 4, dobivamo jednadžbu:

$$\left(\frac{3}{k-0.75}\right)^2 + \left(\frac{3k}{k-0.75}\right)^2 = 16,$$

koja se svodi na kvadratnu jednadžbu

$$7k^2 - 24k = 0,$$

čija su rješenja  $k_1 = 0$  i  $k_2 = \frac{24}{7}$ . Dakle, traženi pravci su  $y = 24$  i  $y = \frac{24}{7}x$ . **(10 bodova)**

**Zadatak 2.**

$$(1+i\sqrt{3})^n = 2^n \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2^n \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^n = 2^n \cdot \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}\right).$$

**(10 bodova)** Prirodni broj  $n$  može se napisati u obliku  $n = 6k + r$ , pri čemu je  $k$  cijeli broj i  $r$  ostatak dijeljenja. U ovisnosti o ostatku, imamo:

$$\operatorname{Re}(1+i\sqrt{3})^n = 2^n \cdot \cos \frac{n\pi}{3} = \begin{cases} 2^n, & n = 6k \\ 2^{n-1}, & n = 6k + 1 \\ -2^{n-1}, & n = 6k + 2 \\ -2^n, & n = 6k + 3 \\ -2^{n-1}, & n = 6k + 4 \\ 2^{n-1}, & n = 6k + 5, \end{cases}$$

Time je tvrdnja dokazana. **(10 bodova)**

**Zadatak 3.** Iz uvjeta  $\binom{m}{3} = 5 \cdot \binom{m}{1}$  dobivamo:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{6} = 5m. \quad (3 \text{ boda})$$

Kako je  $m$  prirodni broj veći ili jednak 3, dijeljenjem s  $m$  dobivamo jednadžbu:

$$m^2 - 3m - 28 = 0,$$

čija su rješenja  $m_1 = -4$  (koje otpada jer nije prirodan broj) i  $m_2 = 7$ . **(7 bodova)** Tada je:

$$\binom{7}{3} (\sqrt{2^{x-1}})^4 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}} \right)^3 = 20 \cdot 7,$$

$$35 \cdot 2^{2x-2} \cdot 2^{-x} = 140,$$

$$2^{x-2} = 4 = 2^2,$$

$$x = 4. \quad (10 \text{ bodova})$$

**Napomena.** Ukoliko se ne odbaci rješenje kvadratne jednadžbe  $m_1 = -4$ , dobit će se odgovarajući  $x = -\frac{21}{5}$ . Ako učenik ne odbaci to rješenje, treba oduzeti 7 bodova.

**Zadatak 4. Prvo rješenje:** Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} a + 1 &\geq 2\sqrt{a}, \\ 2a + 1 &\geq 2\sqrt{2a}, \\ &\vdots \\ na + 1 &\geq 2\sqrt{na}. \end{aligned} \quad (10 \text{ bodova})$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i sređivanjem dobivamo redom:

$$\begin{aligned} (a + 1) + (2a + 1) + \dots + (na + 1) &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}), \\ a(1 + 2 + \dots + n) + n &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}), \\ a \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}), \\ n(n+1)a + 2n &\geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. **(10 bodova)**

**Drugo rješenje:** Dokazujemo indukcijom. Za  $n = 1$  tvrdnja glasi

$$2a + 2 \geq 4\sqrt{a} \iff 2(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0. \quad (5 \text{ bodova})$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj  $n$ . Tada za  $n + 1$  trebamo dokazati

$$(n+1)(n+2)a + 2(n+1) \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}). \quad (3 \text{ boda})$$

Koristimo pretpostavku indukcije:

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}).$$

Zato je

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)a + 2(n+1) &= n(n+1)a + 2n + 2a(n+1) + 2 \\ &\geq \left[ 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}) \right] + 4\sqrt{a} \cdot \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Tu smo iskoristili nejednakost

$$2a(n+1) + 2 \geq 4\sqrt{a(n+1)}.$$

Time je tvrdnja dokazana. **(12 bodova)**

**Zadatak 5. Drugo rješenje:** Iz posljednje dvije jednadžbe, dobivamo  $b(1 - c^2) = c + 1$ , tj.  $c + 1 = 0$  ili  $b = \frac{1}{1-c}$ . Slijedi da je  $c \in \{-1, 0, 2\}$ . Uvrštavanjem  $c = 0$  i  $c = 2$ , ne dobivamo cjelobrojna rješenja za  $a$  i  $b$ , pa je  $c = -1$ . **(10 bodova)** To znači da je  $a + b = 1$ , a  $ab = -6$ . Stoga su  $a$  i  $b$  rješenja kvadratne jednadžbe  $t^2 - t - 6 = 0$ , a to su  $-2$  i  $3$ . To znači da su jedina rješenja sustava  $(-2, 3, -1)$  i  $(3, -2, -1)$ . **(10 bodova)**

**Prvo rješenje:** Oduzimanjem posljednjih dviju jednadžbi dobivamo

$$\begin{aligned} c(b - a) &= a - b, \\ (b - a)(c + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Oдавde je  $c = -1$  ili  $a = b$ . **(5 bodova)**

**(a)** Ako je  $c = -1$ , tada sustav prelazi u:

$$\begin{aligned} ab &= -6, \\ a &= 1 - b. \end{aligned}$$

Eliminacijom nepoznanice  $a$  slijedi

$$b^2 - b + 6 = 0,$$

a oдавde  $b = 3$ ,  $a = -2$  ili  $b = -2$ ,  $a = 3$ . **(7 bodova)**

**(b)** Ako je  $a = b$ , dobivamo sustav

$$\begin{aligned} a^2 + 5 &= c, \\ ac + 1 &= a. \end{aligned}$$

Ovaj se sustav može analizirati na više načina. Na primjer:

**(b1)** Eliminacijom nepoznanice  $c$ :

$$a^3 + 4a + 1 = 0.$$

Ova jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. (Sva takva rješenja moraju biti djelitelji slobodnog člana 1).

**(b2)** Iz druge jednadžbe je

$$c = 1 - \frac{1}{a}$$

pa mora biti  $a = 1$  ili  $a = -1$ , a niti jedan slučaj ne zadovoljava prvu jednadžbu.

Svako ispravno rješenje treba bodovati s **8 bodova**.