Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokaži da je barem jedan od brojeva

$$(a+b+c)^2 - 9ab, \quad (a+b+c)^2 - 9bc, \quad (a+b+c)^2 - 9ca$$

nenegativan.

Zadatak 2. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva oblika $\overline{37abc}$ takvih da je svaki od brojeva $\overline{37abc}$, $\overline{37bca}$ i $\overline{37cab}$ djeljiv s 37?

Zadatak 3. Neka je OAB četvrtina kruga sa središtem O polumjera 1. Nad dužinama $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, kao promjerima, konstruirane su polukružnice s unutarnje strane dane četvrtine kruga. Izračunaj polumjer kružnice koja dodiruje te dvije polukružnice i luk $\overset{\frown}{AB}$.

Zadatak 4. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$(16x^{200}+1)(y^{200}+1) = 16(xy)^{100}.$$

Zadatak 5. Nazovimo prirodan broj n "sretan" ako mu je zbroj svih znamenaka višekratnik od 7, i "supersretan" ako je "sretan" i niti jedan od brojeva

$$n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+12$$

nije "sretan". Koji je najmanji "supersretan" prirodan broj?

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=3$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

Zadatak 3. Odredi sve cijele brojeve x takve da je $1+5\cdot 2^x$ kvadrat racionalnog broja.

Zadatak 4. Dan je četverokut $ABCD$ s kutovima $\alpha=60^\circ$, $\beta=90^\circ$, $\gamma=120^\circ$. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki S, pri čemu je $2|BS|=|SD|=2d$. Iz polovišta P dijagonale $\overline{AC}$ spuštena je okomica $\overline{PM}$ na dijagonalu $\overline{BD}$, a iz točke S okomica $\overline{SN}$ na $\overline{PB}$.

Dokaži: (a) $|MS|=|NS|=\dfrac{d}{2}$;

(b) $|AD|=|DC|$;

(c) $P(ABCD)=\dfrac{9d^2}{2}$.

Zadatak 5. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostalih dvaju kutova. Odredi duljine stranica trokuta.

Zadatak 2. Neka su $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Zadatak 3. Od svih brojeva oblika $36^m - 5^n$, gdje su m i n prirodni brojevi, odredi najmanji po apsolutnoj vrijednosti.

Zadatak 4. Bočni brid pravilne trostrane piramide je $b = 1$, a njezin obujam je $V = \frac{1}{6}$. Koliki je kut pri vrhu bočne strane?

Zadatak 5. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m kvadratića crnih, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Dokaži da za po volji odabrane prirodne brojeve m i n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Zadatak 2. Odredi formulu za zbroj

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor.$$

Tu je $\lfloor r\rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od r.

Zadatak 3. Nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su kvadrati $ABKL$, $BCMN$ (koji s trokutom imaju samo zajedničku stranicu).

a) Ako je D točka takva da je $ABCD$ paralelogram, dokaži da su trokuti ABD i BKN sukladni.

b) Dokaži da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{KN}$ i središta kvadrata $ABKL$, $BCMN$ vrhovi kvadrata.

Zadatak 4. U prostoru je dano šest različitih točaka, O, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Dokaži da postoje indeksi i, j, $1 \leq i < j \leq 5$ takvi da je $\sphericalangle T_iOT_j \leq 90^\circ$.

Zadatak 5. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m kvadratića crnih, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokaži da je barem jedan od brojeva

$$(a+b+c)^2 - 9ab, \quad (a+b+c)^2 - 9bc, \quad (a+b+c)^2 - 9ca$$

nenegativan.

Zadatak 2. Na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ dana je točka E takva da je $|AE| = 3|EB|$, a na stranici $\overline{AD}$ dana je točka F takva da je $|AF| = 5|FD|$. S K je označen presjek pravaca DE i CF, s L presjek pravaca DE i BF, te s M presjek pravaca BF i CE. Dokaži da je zbroj površina trokuta EML i CDK jednak zbroju površina trokuta FLK i BCM.

Zadatak 3. Tamara i Mirjana uspoređuju svoje uštеđevine. Niti jedna nema više od 100 kuna. Svaka od njih izbroji svoju ušteđevinu u kunama i lipama. Ustanovile su da je iznos Mirjanine ušteđevine za pet lipa veći od dvostruke Tamarine ušteđevine. Tamara ima onoliko kuna koliko Mirjana ima lipa, i onoliko lipa koliko Mirjana ima kuna. Kolika je Tamarina ušteđevina?

Zadatak 4. Neka je a cijeli broj relativno prost s 35. Dokaži da je broj

$$(a^4 - 1)(a^4 + 15a^2 + 1)$$

djeljiv s 35.

Zadatak 5. Može li se kvadrat podijeliti na 2008 kvadrata (ne nužno istih duljina stranica)? Ako može navedi primjer, a ako ne može dokaži!

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$(\sqrt{x}-2)^4+(\sqrt{x}-3)^4=1.$$

Zadatak 2. Za kvadratnu funkciju $f(x)=ax^2+bx+c$ vrijede ove nejednakosti

$$f(-3)<-5, \qquad f(-1)>0, \qquad f(1)<4.$$

Dokaži da je koeficijent a manji od $-\frac{1}{8}$.

Zadatak 3. Točke E, F, G su redom polovišta stranica $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AB}$ paralelograma $ABCD$. Kružnica opisana trokutu DEF dira stranicu $\overline{AB}$ u točki G. Nađi omjer duljina stranica danog paralelograma ($|AB|:|AD|$).

Zadatak 4. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su redom točke P i Q. Dužine $\overline{AQ}$ i $\overline{CP}$ sijeku se u točki O.

Ako su površine trokuta COQ, AOC i APO redom jednake 1 cm^2, 2 cm^2 i 3 cm^2, odredi površinu četverokuta $OPBQ$.

Zadatak 5. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\log_2 5 \cdot \log_5 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) > 1.$$

Zadatak 2. Za koje realne brojeve a postoji rješenje jednadžbe

$$\cos 3x \cdot \cos^3 x - \sin 3x \cdot \sin^3 x = a\,?$$

Zadatak 3. U kocki $ABCDA_1B_1C_1D_1$ točka P je polovište brida $\overline{BC}$, a točka Q je središte kvadrata CC_1D_1D. Ravnina kroz točke A, P i Q dijeli kocku na dva dijela. Koliki je omjer njihovih obujmova?

Zadatak 4. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostala dva kuta. Odredi duljine stranica trokuta.

Zadatak 5. U jednakostraničnom trokutu duljine stranice 3 cm nalazi se 20 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera $\frac{3}{5}$ cm koji prekriva barem 3 od tih točaka.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Dokaži da za prirodni broj n, $n > 5$ vrijede nejednakosti

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Zadatak 2. Dokaži formulu (n je prirodni broj):

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Odredi formulu za zbroj

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor.$$

Tu je $\lfloor r\rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od r.

Zadatak 3. Niz (x_n) definiran je rekurzivnom formulom

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha, \\ x_{n+1} &= \sqrt{1+x_n}, \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

a) Dokaži da je za svaki pozitivni broj α niz (x_n) konvergentan i izračunaj mu limes.

b) Za koji realni broj α je ovaj niz konstantan?

Zadatak 4. **a)** Dokaži da se duljina težišnice izražava pomoću duljina njegovih stranica formulom

$$t_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2.$$

b) U trokutu DEF duljine stranica jednake su duljinama težišnica trokuta ABC. Ako je trokut DEF tupokutan, dokaži da je tada najmanji kut trokuta ABC manji od 45°.

Zadatak 5. Neka je A točka na hiperboli $xy = 4$, a B točka na elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$. Dokaži da vrijedi

$$|AB| > \frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija,
Primošten, 7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokaži da je barem jedan od brojeva

$$(a+b+c)^2-9ab, \quad (a+b+c)^2-9bc, \quad (a+b+c)^2-9ca$$

nenegativan.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da su sva tri broja negativna. Tada imamo

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2-9ab&<0,\\(a+b+c)^2-9bc&<0,\\(a+b+c)^2-9ca&<0.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i sređivanjem dobivamo

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0,$$

tj.

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]<0.$$

Međutim, suma kvadrata triju realnih brojeva ne može biti negativna, pa zaključujemo da je barem jedan od promatrana tri broja nenegativan.

Zadatak 2. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva oblika $\overline{37abc}$ takvih da je svaki od brojeva $\overline{37abc}$, $\overline{37bca}$ i $\overline{37cab}$ djeljiv s 37?

Rješenje. Peteroznamenkasti broj $\overline{37abc}$ je djeljiv s 37 ako i samo ako je $\overline{abc}$ djeljiv s 37. Neka je $x=\overline{abc}$, $y=\overline{bca}$ i $z=\overline{cab}$. Lako provjerimo da je

$$10x-y=999a, \quad 10y-z=999b, \quad 10z-x=999c. \tag{1}$$

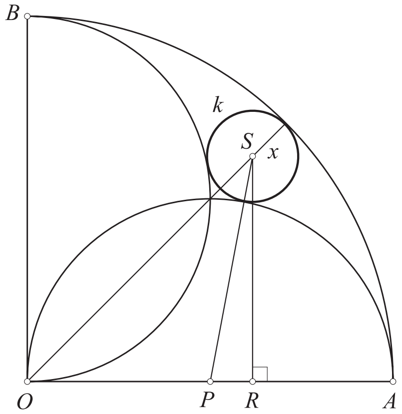
Budući je 999 višekratnik broja 37 ($999=37\cdot 27$), iz (1) slijedi: ako je neki od brojeva x, y ili z djeljiv s 37, onda su i svi ostali.

Svi traženi brojevi su oni čiji su troznamenkasti završetci višekratnici broja 37. Takvi su brojevi: $37\,000, 37\,037, 37\,074, 37\,111, \ldots, 37\,999$.

Dakle traženih brojeva ima 28.

Zadatak 3. Neka je OAB četvrtina kruga sa središtem O polumjera 1. Nad dužinama $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, kao promjerima, konstruirane su polukružnice s unutarnje strane dane četvrtine kruga. Izračunaj polumjer kružnice koja dodiruje te dvije polukružnice i luk $\widehat{AB}$.

Rješenje. Neka je S središte promatrane kružnice, x njezin polumjer, P polovište dužine $\overline{OA}$ i R nožište okomice iz S na dužinu $\overline{OA}$.



Zbog simetrije je $\sphericalangle SOR = 45°$, pa je $|OR| = |RS|$. Trokut SOR je jednakokračan i pravokutan pa imamo

$$|OR| = |RS| = |OS| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2}}.$$

U trokutu PRS je

$$|PR| = |OR| - |OP| = \frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad |PS| = \frac{1}{2} + x,$$

pa je prema Pitagorinu poučku

$$\begin{aligned} |PS|^2 &= |PR|^2 + |RS|^2 \\ \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}-1} = \frac{5-2\sqrt{2}}{17}.$$

Zadatak 4. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100}.$$

Rješenje.

Prvo rješenje. Stavimo $4x^{100}=A$, $y^{100}=B$. Tada dobivamo

$$\begin{aligned} & (A^2+1)(B^2+1) &=& \ 4AB \\ \Leftrightarrow\ & A^2B^2+A^2+B^2+1 &=& \ 4AB \\ \Leftrightarrow\ & (A^2B^2-2AB+1)+(A^2-2AB+B^2) &=& \ 0 \\ \Leftrightarrow\ & (AB-1)^2+(A-B)^2 &=& \ 0. \end{aligned}$$

Ovo je moguće jedino ako je $AB=1$ i $A=B$, odakle slijedi:

1° $A=B=1 \quad \Rightarrow \quad x^{100}=\dfrac{1}{4}, \quad x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}}, \quad y^{100}=1, \quad y=\pm 1.$

2° $A=B=-1$. U ovom slučaju nema rješenja.

Dakle, postoje četiri realna rješenja: $\left(\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}},1\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}},-1\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}},1\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}},-1\right).$

Drugo rješenje.

Za $x=0$ ili $y=0$ jednadžba nije zadovoljena. Dijeljenjem jednadžbe s $4x^{100}y^{100}$ dobivamo

$$\left(4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}\right)\left(y^{100}+\frac{1}{y^{100}}\right)=4.$$

Za pozitivan broj a vrijedi nejednakost $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ jer je $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geq 0$, pri čemu se jednakost dostiže ako i samo ako je $a=1$.

Lijeva strana jednadžbe je

$$\left(4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}\right)\left(y^{100}+\frac{1}{y^{100}}\right)\geq 2\cdot 2=4,$$

pa je

$$4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}=2 \qquad \text{i} \qquad y^{100}+\frac{1}{y^{100}}=2.$$

Odavde slijedi $4x^{100}=1$ i $y^{100}=1$, odnosno $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}}$ i $y=\pm 1$.

Jednadžba ima četiri realna rješenja.

Zadatak 5. Nazovimo prirodan broj n “sretan” ako mu je zbroj svih znamenaka višekratnik od 7, i “supersretan” ako je “sretan” i niti jedan od brojeva

$$n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+12$$

nije “sretan”. Koji je najmanji “supersretan” prirodan broj?

Rješenje. Neka je n "sretan" broj, a x njegova znamenka jedinica.

1° Promatrajmo najprije slučaj $0 \leq x < 3$. Broj $n+7$ razlikuje se od n samo u zadnjoj znamenci, pa je $n+7$ djeljiv sa 7, tj. n nije "supersretan".

2° Neka je $3 < x \leq 9$. Promatrajmo sedam brojeva:

$$n+(10-x),\ n+(10-x)+1,\ \ldots\ n+(10-x)+6.$$

Kako je $n = 10k + x$, ovi brojevi se razlikuju samo u zadnjoj znamenci koja je u skupu $\{0, 1, \ldots, 6\}$. Promatrajmo zbrojeve njihovih znamenaka. Budući da imamo sedam uzastopnih prirodnih brojeva, jedan od njih je djeljiv sa 7, i odgovarajući broj je "sretan".

Kako je $x > 3$, imamo

$$[n+(10-x)+6]-n < 13,$$

pa je neki od brojeva $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+12$ "sretan", što znači da n nije "supersretan".

3° Preostaje jedina mogućnost $x = 3$.

Kako 3 nije sretan, promatrajmo dvoznamenkasti završetak broja n, $\overline{y3}$. Ako je $y < 9$, zbroj znamenaka broja $n+9$ je također višekratnik broja 7 (dodavanjem broja 9 broju n smanjuje se znamenka jedinica za 1 i povećava znamenka desetica za 1). Stoga, da bi broj n bio "supersretan", njegove zadnje dvije znamenke moraju biti 93. Uočimo da broj 93 nije "sretan".

Promatrajmo sada troznamenkasti završetak broja n, $\overline{z93}$. Ako je $z < 9$, dodavanjem broja 11 broju n dobiva se također "sretan" broj (znamenka jedinica se poveća za 1, znamenka desetica smanji za 9 i znamenka stotica poveća za 1). Da bi n bio "supersretan" mora biti $z = 9$. No lako se provjeri da je 993 sretan broj i da nijedan od brojeva $993+1,\ 993+2,\ \ldots, 993+12$ nije sretan broj, tj. 993 je najmanji "supersretan" broj.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija,
Primošten, 7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

Rješenje. Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo:

$$\begin{gathered}2x^2+3x+5+2\sqrt{(2x^2+5)^2-(3x)^2}+2x^2-3x+5=9x^2\\ 2\sqrt{4x^4+11x^2+25}=5x^2-10\\ 16x^4+44x^2+100=25x^4-100x^2+100\\ 144x^2=9x^4\\ 9x^2(x^2-16)=0.\end{gathered}$$

Rješenja ove jednadžbe su $x\in\{-4,0,4\}$. Očito mora biti $x\geq 0$ i $x=0$ nije rješenje polazne jednadžbe. Preostaje jedino $x=4$, i provjerom se vidi da je to doista rješenje.

Drugo rješenje.
Diskriminanta kvadratnih funkcija $f(x)=2x^2\pm 3x+5$ jednaka je: $D=(\pm 3)^2-4\cdot 2\cdot 5=-31<0$, pa su izrazi pod korijenom strogo pozitivni. Jednadžba ima smisla samo za $x>0$.

Uočimo da je
$$(2x^2+3x+5)-(2x^2-3x+5)=6x.$$

Lijevu stranu ove jednadžbe možemo zapisati kao razliku kvadrata:

$$\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}\right)=6x.$$

Druga zagrada s lijeve strane jednaka je $3x$, pa slijedi

$$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2.$$

Zbrajanjem ove jednakosti s onom u zadatku dobiva se

$$2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobiva se jednadžba $x^2=16$, čija su rješenja $x_1=-4$, i $x_2=4$. Zbog pozitivnosti rješenja ostaje samo $x=4$. Neposredno se provjeri da je to zaista rješenje.

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Rješenje. Korištenjem A-H nejednakosti dobivamo

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}.$$

Ovdje smo koristili nejednakost $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ koja je ekvivalenta s $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, a ova vrijedi.

Zadatak 3. Odredi sve cijele brojeve x takve da je $1 + 5 \cdot 2^x$ kvadrat racionalnog broja.

Rješenje. Moramo promatrati sljedeća tri slučaja.

1° Za $x = 0$ je $1 + 5 \cdot 2^x = 6$, a to nije potpun kvadrat.

2° Za $x > 0$ je $1 + 5 \cdot 2^x \in \mathbf{N}$, pa imamo

$$1 + 5 \cdot 2^x = n^2,$$

za neki prirodni broj n. Zato je

$$5 \cdot 2^x = (n-1)(n+1).$$

Očito broj n mora biti neparan, veći od 1. Jedan od brojeva $n-1$, $n+1$ je djeljiv s 4. Uz to je $n^2 - 1$ djeljiv s 5, pa je $n^2 - 1 \geq 5 \cdot 8 = 40$, tj. $n \geq 7$.

Jedan od brojeva $n-1$ ili $n+1$ djeljiv je s 5. Jedan od njih djeljiv je s 2, ali nije djeljiv s većom potencijom broja 2; a drugi je djeljiv s 2^{x-1}. Jasno je da jedan mora biti jednak $2 \cdot 5$, a drugi 2^{x-1}. Mogućnosti su: $n - 1 = 10$ ili $n + 1 = 10$. Od toga zadovoljava samo druga mogućnost, tj. $n = 9$. Tada je $5 \cdot 2^x = 80$, pa je $x = 4$.

3° Za $x < 0$ je $1 + 5 \cdot 2^x$ racionalan broj s nazivnikom 2^{-x}. Tada je $1 + 5 \cdot 2^x = q^2,\ q \in \mathbf{Q}$ i nazivnik od q je $2^{-x/2}$. Dakle x je paran. Stavimo li $x = -2y,\ y \in \mathbf{N}$, imamo

$$2^{2y} + 5 = (q \cdot 2^y)^2.$$

Kako je $q \cdot 2^y = r$ cijeli broj, dobivamo

$$5 = (r - 2^y)(r + 2^y).$$

Mora biti $r - 2^y = 1$ i $r + 2^y = 5$. Odavde dobivamo $y = 1$ i $x = -2$. Tada je $1 + 5 \cdot 2^x = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

Dakle, traženi brojevi su $x = 4$ i $x = -2$.

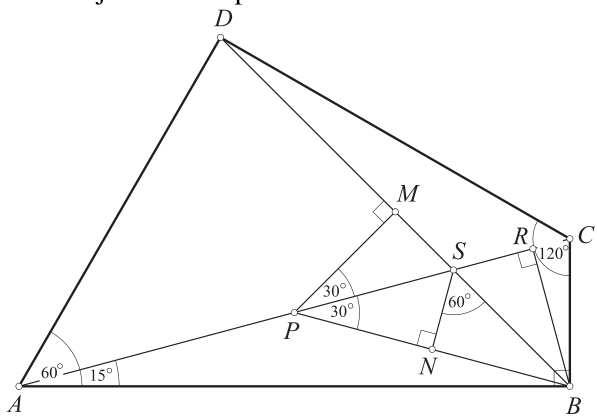
Zadatak 4. Dan je četverokut $ABCD$ s kutovima $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki S, pri čemu je $2|BS| = |SD| = 2d$. Iz polovišta P dijagonale $\overline{AC}$ spuštena je okomica $\overline{PM}$ na dijagonalu $\overline{BD}$, a iz točke S okomica $\overline{SN}$ na $\overline{PB}$.

Dokaži: (a) $|MS| = |NS| = \dfrac{d}{2}$;

(b) $|AD| = |DC|$;

(c) $P(ABCD) = \dfrac{9d^2}{2}$.

Rješenje. Trokuti ABC i ACD su pravokutni s hipotenuzom $\overline{AC}$ pa je četverokut $ABCD$ tetivni. Točka P je središte opisane mu kružnice.



(a) Točka M je polovište dijagonale $\overline{BD}$. Iz danih uvjeta dobivamo: $|DM| = |MB| = \dfrac{3d}{2}$, $|MS| = \dfrac{d}{2}$.

Nadalje, iz $\sphericalangle BPM = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BPD = \sphericalangle BAD = 60^\circ$ dobivamo $\sphericalangle PBM = 30^\circ$.

Kako je $NS \perp PB$, imamo $|NS| = \dfrac{1}{2}|BS| = \dfrac{1}{2}d = |MS|$.

(b) Trokuti MPS i NPS su pravokutni sa zajedničkom hipotenuzom i sukladnom katetom. Zato su oni sukladni i vrijedi $\sphericalangle MPS = \sphericalangle SPN = 30^\circ$ pa je $|SP| = 2|NS|$.

Trokut APB je jednakokračan i $\sphericalangle PAB = \dfrac{1}{2}\sphericalangle SPB = 15^\circ$.

Tada je i $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB - \sphericalangle CAB = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$. Stoga je trokut ACD jednakokračan pravokutan i $|AD| = |CD|$.

(c) Imamo

$$P(ABCD) = P(ABC) + P(ACD) = \frac{1}{2}|AC|(v_B + v_D), \tag{1}$$

$$v_D = |DP| = \sqrt{|DS|^2 - |SP|^2} = \sqrt{(2d)^2 - d^2} = d\sqrt{3},$$

$$v_B : v_D = |BR| : |DP| = |SB| : |SD| = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{1}{2}v_D = \frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

$$|AC| = 2|DP| = 2d\sqrt{3}.$$

Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2d\sqrt{3}\left(\frac{d\sqrt{3}}{2} + d\sqrt{3}\right) = \frac{9d^2}{2}.$$

Zadatak 5. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Rješenje. Kako je $29^2 = 841$, svaki složeni broj, koji je manji od 840, djeljiv je barem s jednim prostim brojem koji nije veći od 23. Ima samo devet prostih brojeva (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i 23) koji nisu veći od 23. Kako ima deset složenih brojeva koji su manji od 840, po Dirichletovom principu postoje dva među njima koja su djeljiva s istim prostim brojem koji nije veći od 23. Ta dva broja nisu relativno prosta.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija,
Primošten, 7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostalih dvaju kutova. Odredi duljine stranica trokuta.

Rješenje. Neka je $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$. Tada je $\alpha < \beta < \gamma$. Moguća su tri slučaja.

1° $\beta = 2\alpha$

Koristeći poučak o sinusima i kosinusov poučak dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2a} = \frac{n}{2(n-1)},$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}.$$

Iz jednadžbe $\dfrac{n}{2(n-1)} = \dfrac{n+4}{2(n+1)}$ dobivamo $n = 2$. Stranice trokuta bi bile 1, 2 i 3, što nije moguće.

2° $\gamma = 2\alpha$

Slično kao u prethodnom slučaju dobili bismo:

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{n+1}{2(n-1)},$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}.$$

Iz jednadžbe $\dfrac{n+1}{2(n-1)} = \dfrac{n+4}{2(n+1)}$ se dobiva $n = 5$ i duljine stranica trokuta su 4, 5 i 6.

3° $\gamma = 2\beta$

Ponavljanjem postupka iz prethodnih dvaju slučajeva dobivamo

$$\cos\beta = \frac{\sin 2\beta}{2\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{n+1}{2n},$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}.$$

Iz jednadžbe $\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2 - 3n - 1 = 0$, čija rješenja $n_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ su iracionalna.

Dakle, jedino rješenje je trokut sa stranicama duljina 4, 5 i 6.

Zadatak 2. Neka su $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Rješenje. Uz oznaku $x_{n+1} = x_1$ imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 + x_i x_{i+1} - x_i x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{x_i x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}} \right) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^2}{x_i + x_{i+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i+1}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Drugo rješenje.
Uz oznaku $x_{n+1} = x_1$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x_{i+1}^2 + x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}}.
\end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}} \geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i+1}) = \frac{1}{2},$$

pri čemu smo koristili nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine.

Zadatak 3. Od svih brojeva oblika $36^m - 5^n$, gdje su m i n prirodni brojevi, odredi najmanji po apsolutnoj vrijednosti.

Rješenje. Kako broj 36^m završava sa 6 za svaki prirodan broj m, a broj 5^n završava s 5 za svaki prirodan broj n, broj $N = |36^m - 5^n|$ završava s 1 ili s 9. Stoga najmanje njegove vrijednosti mogu biti 1, 9, 11, ...

Pritom za $m = 1$ i $n = 2$ dobivamo $N = 11$. Pokažimo da ne može biti $N = 1$ niti $N = 9$, tj. da je $N = 11$ najmanji traženi broj.

Iz jednakosti $36^m - 5^n = \pm 9$ slijedilo bi da je broj 5^n djeljiv s 9, što ne može biti.

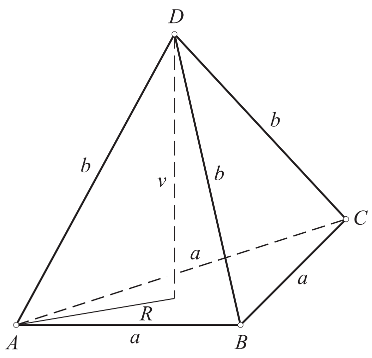
Iz jednakosti $36^m - 5^n = 1$ slijedilo bi $5^n = 36^m - 1 = (6^m - 1)(6^m + 1)$, tj. $5 | 6^m + 1$, što nije moguće jer ovaj broj završava znamenkom 7, pa ne može biti djeljiv s 5.

Iz jednakosti $36^m - 5^n = -1$ slijedilo bi $5^n = 36^m + 1$, što nije moguće jer broj $36^m + 1$ završava znamenkom 7, pa ne može biti djeljiv s 5.

Zadatak 4. Bočni brid pravilne trostrane piramide je $b = 1$, a njezin obujam je $V = \frac{1}{6}$. Koliki je kut pri vrhu bočne strane?

Rješenje. Baza piramide je jednakostranični trokut stranice duljine a. Polumjer njemu opisane kružnice je $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Visina piramide je

$$v = \sqrt{b^2 - R^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3}}.$$



Obujam te piramide je

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{v}{3} = \frac{1}{6}.$$

Odavde dobivamo jednadžbu

$$a^6 - 3a^4 + 4 = 0.$$

Očigledno $a^2 = 2$ zadovoljava ovu jednadžbu. Dijeljenjem jednadžbe s $a^2 - 2$ dobivamo jednadžbu $a^4 - a^2 - 2 = 0$, koju zadovoljavaju $a^2 = 2$ i $a^2 = -1$ (ovo nije moguće). Dakle jedina mogućnost je $a^2 = 2$.

Kut pri vrhu pobočke izračunat ćemo pomoću kosinusovog poučka:

$$\cos \varphi = \frac{b^2 + b^2 - a^2}{2b \cdot b} = 1 - \frac{a^2}{2b^2} = 0,$$

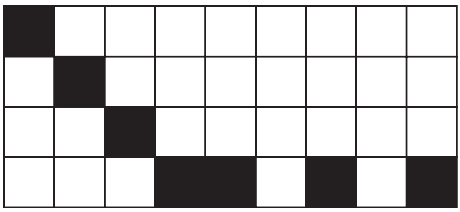
ili sinusovog poučka:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, traženi kut je $\varphi = 90^\circ$.

Zadatak 5. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m crnih kvadratića, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

Rješenje. Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $n \leq p$. U kvadratni dio pravokutnika s lijeve strane postavimo crne kvadratiće na glavnu dijagonalu. Ako je $n < p$, u pravokutnik $n \times (p-n)$ u svaki drugi stupac u zadnji redak, počevši s desne strane, stavimo po jedan crni kvadratić. Lako je vidjeti da će dozvoljenim operacijama svi kvadratići postati crni. Ako su n i p iste parnosti onda je broj crnih kvadratića u ovom rasporedu jednak $n + \frac{p-n}{2}$, a ako su različitih parnosti ima ih $n + \frac{p-n+1}{2}$. Zato je $m \leq \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$. Pokazat ćemo da je $m = \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.



Segment na rubu je brid samo jednog kvadratića, dok je unutarnji segment brid dvaju kvadratića. Promatrat ćemo segmente koji pripadaju samo jednom crnom jediničnom kvadratiću. Sve ćemo takve segmente zvati rubnim segmentima. Kako na početku ima m crnih kvadratića, tada (na početku) ima najviše $4m$ rubnih segmenata. Ako promijenimo bijeli kvadratić, koji je dodirivao k crnih kvadratića, u crni, onda će nestati k rubnih segmenata, a nastat će $4-k$ novih rubnih segmenata. Kako je operacija dozvoljena samo ako je $k \geq 2$, imamo $4-k \leq k$, tako da se broj rubnih segmenata ne povećava. Kada svi kvadratići prijeđu u crne, bit će $2(n+p)$ rubnih segmenata. Odavde slijedi $4m \geq 2(n+p)$, ili $m \geq \frac{n+p}{2}$ tj. $m \geq \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.

Prema tome, $m = \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija,
Primošten, 7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Dokaži da za po volji odabrane prirodne brojeve m i n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Rješenje. Ako je neki od brojeva m ili n jednak 1, nejednakost očito vrijedi.

Pretpostavimo zato da je $m > 1$ i $n > 1$. Tada vrijedi $\sqrt[n]{m} = 1 + u$, $\sqrt[m]{n} = 1 + v$, za neke pozitivne realne brojeve u i v. Prema binomnoj formuli (ili Bernoullijevoj nejednakosti) vrijedi

$$m = (1+u)^n > 1 + nu, \qquad n = (1+v)^m > 1 + mv,$$

odnosno

$$u < \frac{m-1}{n}, \qquad v < \frac{n-1}{m}.$$

Odavde slijedi

$$1 + u < \frac{m+n-1}{n}, \qquad 1 + v < \frac{m+n-1}{m}.$$

Iz posljednjih nejednakosti dobivamo nejednakost koju je trebalo dokazati:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} > \frac{n}{m+n-1} + \frac{m}{m+n-1} = \frac{m+n}{m+n-1} > 1.$$

Zadatak 2. Odredi formulu za zbroj

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor.$$

Tu je $\lfloor r \rfloor$ cjelobrojni dio pozitivnog realnog broja r.

Rješenje. Označimo sa S_n traženi zbroj. Nekoliko prvih pribrojnika u toj sumi izgleda ovako:

$$S_n = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots.$$

S obzirom da je

$$(n-1)^2 < n^2 - 1 < n^2,$$

vrijedi

$$n - 1 \leq \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor < n,$$

pa je posljednji pribrojnik u ovoj sumi jednak $n-1$.

Postavlja se pitanje: ako je $1 \leq k \leq n-1$, koliko će se puta u sumi pojaviti pribrojnik k? Tu će vrijednost imati sljedeći članovi sume:

$$\lfloor\sqrt{k^2}\rfloor, \quad \lfloor\sqrt{k^2+1}\rfloor, \ldots, \quad \lfloor\sqrt{(k+1)^2-1}\rfloor.$$

Dakle, pribrojnik k pojavljuje se $(k+1)^2-k^2$ puta. Primijetimo da je posljednji član sume jednak $\sqrt{n^2-1}$, pa je on ujedno posljednji član u ovakvoj skupini pribrojnika. Zato je tražena suma jednaka:

$$S_n = 1\cdot(2^2-1^2)+2(3^2-2^2)+\ldots+(n-1)[n^2-(n-1)^2].$$

Izračunajmo ovaj zbroj.

$$\begin{aligned}
S_n &= 2^2-1^2+2\cdot 3^2-2\cdot 2^2+3\cdot 4^2-3\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2-(n-1)(n-1)^2\\
&= -1^2-2^2-3^2-\ldots-(n-1)^2+(n-1)n^2\\
&= (n-1)n^2-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Zadatak 3. Nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su kvadrati $ABKL$, $BCMN$ (koji s trokutom imaju samo zajedničku stranicu).

a) Ako je D točka takva da je $ABCD$ paralelogram, dokaži da su trokuti ABD i BKN sukladni.

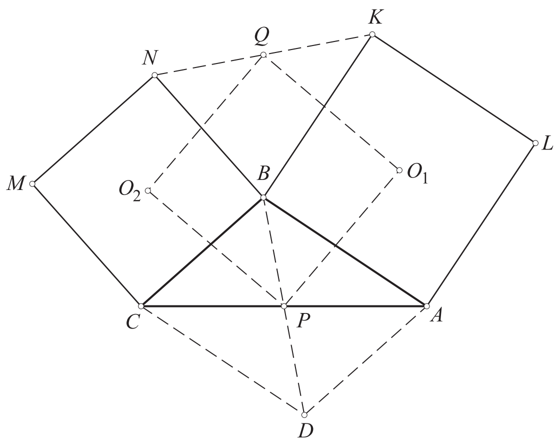
b) Dokaži da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{KN}$ i središta kvadrata $ABKL$, $BCMN$ vrhovi kvadrata.

Rješenje.

a) Vrijedi $|BK| = |AB|$ jer su to stranice istog kvadrata. Također, $|BN| = |BC| = |AD|$. Nadalje

$$\measuredangle KBN = 360^\circ - (90^\circ + \measuredangle ABC + 90^\circ) = 180^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle BAD.$$

Sada po poučku SKS slijedi tvrdnja.



b) Rotacijom trokuta ABD oko točke O_1 za $90°$ dobivamo trokut BKN. Znači, trokut PO_1Q je jednakokračan pravokutan, dakle, polovina kvadrata. Analogna tvrdnja vrijedi za rotaciju oko točke O_2. Zato je PO_1QO_2 kvadrat.

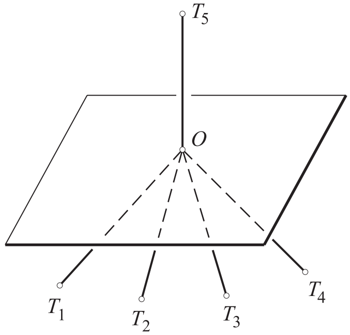
Drugo rješenje dijela **b)**. Lik PO_1QO_2 je paralelogram, jer su mu vrhovi polovišta stranica četverokuta $AKNC$. Dovoljno je još dokazati da je $|AN| = |CK|$ i $AN \perp CK$.

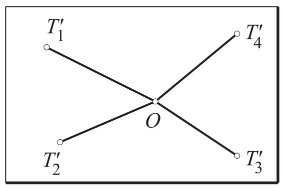
Vrijedi $|CB| = |BN|$, $|BK| = |BA|$ i $\sphericalangle CBK = 90° + \sphericalangle NBK = \sphericalangle NCA$. Zato su trokuti CBK i NBA sukladni, pa je $|CK| = |AN|$. Dalje je $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BNA$. Odavde zbog $BC \perp BN$ slijedi $CK \perp NA$ (kutovi s okomitim kracima).

Zadatak 4. U prostoru je dano šest različitih točaka, O, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Dokaži da postoje indeksi i, j, $1 \le i < j \le 5$ takvi da je $\sphericalangle T_iOT_j \le 90°$.

Rješenje.

Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi i promotrimo ravninu π kroz točku O okomitu na pravac OT_5. Točke T_1, T_2, T_3, T_4 nalaze se sa suprotne strane te ravnine u odnosu na točku T_5.





Neka su T'_1, T'_2, T'_3, T'_4, ortogonalne projekcije točaka T_1, T_2, T_3, T_4 na ravninu π. Nijedna među njima ne podudara se s točkom O jer, na primjer, kad bi bilo $T'_1 = O$, onda bi točke T_5, O, T_1 bile kolinearne pa bi barem jedan od kutova $\sphericalangle T_5OT_2$, $\sphericalangle T_2OT_1$ morao biti manji ili jednak od $90°$.

Uočimo nadalje da za $1 \le i < j \le 4$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT_i} \cdot \overrightarrow{OT_j} &= (\overrightarrow{OT'_i} + \overrightarrow{T'_iT_i}) \cdot (\overrightarrow{OT'_j} + \overrightarrow{T'_jT_j}) \\
&= \overrightarrow{OT'_i} \cdot \overrightarrow{OT'_j} + \overrightarrow{OT'_i} \cdot \overrightarrow{T'_jT_j} + \overrightarrow{T'_iT_i} \cdot \overrightarrow{OT'_j} + \overrightarrow{T'_iT_i} \cdot \overrightarrow{T'_jT_j} \\
&= \overrightarrow{OT'_i} \cdot \overrightarrow{OT'_j} + |T'_iT_i| \cdot |T'_jT_j| > \overrightarrow{OT'_i} \cdot \overrightarrow{OT'_j}
\end{aligned}$$

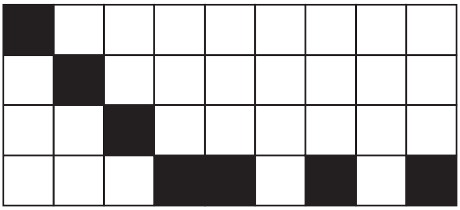
Dakle, ako je $\sphericalangle T_iOT_j > 90°$, tj. $\overrightarrow{OT_i} \cdot \overrightarrow{OT_j} < 0$, onda je pogotovo $\overrightarrow{OT'_i} \cdot \overrightarrow{OT'_j} < 0$, pa je $\sphericalangle T'_iOT'_j > 90°$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su točke T'_1, T'_2, T'_3, T'_4, poredane kao na slici. Onda prema prethodnom vrijedi $\sphericalangle T'_1OT'_2 > 90°$, $\sphericalangle T'_1OT'_2 > 90°$, $\sphericalangle T'_1OT'_2 > 90°$, $\sphericalangle T'_1OT'_2 > 90°$, što nije moguće, jer je zbroj tih kutova jednak $360°$.

Time smo dobili proturječje, pa je polazna tvrdnja dokazana.

Zadatak 5. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m crnih kvadratića, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

Rješenje. Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $n \leq p$. U kvadratni dio pravokutnika s lijeve strane postavimo crne kvadratiće na glavnu dijagonalu. Ako je $n < p$, u pravokutnik $n \times (p-n)$ u svaki drugi stupac u zadnji redak, počevši s desne strane, stavimo po jedan crni kvadratić. Lako je vidjeti da će dozvoljenim operacijama svi kvadratići postati crni. Ako su n i p iste parnosti onda je broj crnih kvadratića u ovom rasporedu jednak $n + \frac{p-n}{2}$, a ako su različitih parnosti ima ih $n + \frac{p-n+1}{2}$. Zato je $m \leq \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$. Pokazat ćemo da je $m = \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.



Segment na rubu je brid samo jednog kvadratića, dok je unutarnji segment brid dvaju kvadratića. Promatrat ćemo segmente koji pripadaju samo jednom crnom jediničnom kvadratiću. Sve ćemo takve segmente zvati rubnim segmentima. Kako na početku ima m crnih kvadratića, tada (na početku) ima najviše $4m$ rubnih segmenata. Ako promijenimo bijeli kvadratić, koji je dodirivao k crnih kvadratića, u crni, onda će nestati k rubnih segmenata, a nastat će $4-k$ novih rubnih segmenata. Kako je operacija dozvoljena samo ako je $k \geq 2$, imamo $4-k \leq k$, tako da se broj rubnih segmenata ne povećava. Kada svi kvadratići prijeđu u crne, bit će $2(n+p)$ rubnih segmenata. Odavde slijedi $4m \geq 2(n+p)$, ili $m \geq \frac{n+p}{2}$ tj. $m \geq \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.

Prema tome, $m = \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija,
7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokaži da je barem jedan od brojeva $(a+b+c)^2 - 9ab$, $(a+b+c)^2 - 9bc$, $(a+b+c)^2 - 9ca$ nenegativan.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da su sva tri broja negativna. Tada imamo

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 - 9ab &< 0,\\ (a+b+c)^2 - 9bc &< 0,\\ (a+b+c)^2 - 9ca &< 0.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i sređivanjem dobivamo

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca < 0,$$

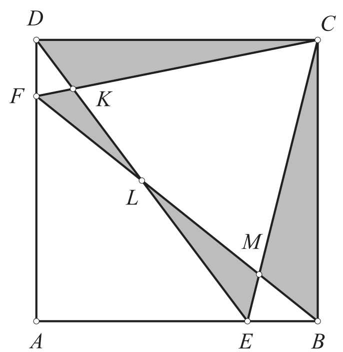
tj.

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] < 0.$$

Međutim, suma kvadrata triju realnih brojeva ne može biti negativna, pa zaključujemo da je barem jedan od promatrana tri broja nenegativan.

Zadatak 2. Na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ dana je točka E takva da je $|AE| = 3|EB|$, a na stranici $\overline{AD}$ dana je točka F takva da je $|AF| = 5|FD|$. S K je označen presjek pravaca DE i CF, s L presjek pravaca DE i BF, te s M presjek pravaca BF i CE. Dokaži da je zbroj površina trokuta EML i CDK jednak zbroju površina trokuta FLK i BCM.

Rješenje.



Sa slike vidimo da su površine trokuta BCF i CDE jednake $\frac{|AB|^2}{2}$, jer imaju jednake osnovke i visine (jednake duljini stranice kvadrata). Četverokut $CKLM$ je zajednički za oba trokuta. Zato je zbroj površina trokuta EML i CDK jednak zbroju površina trokuta FLK i BCM.

Zadatak 3. Tamara i Mirjana uspoređuju svoje uštеđevine. Niti jedna nema više od 100 kuna. Svaka od njih izbroji svoju uštеđevinu u kunama i lipama. Ustanovile su da je iznos Mirjanine uštеđevine za pet lipa veći od dvostruke Tamarine uštеđevine. Tamara ima onoliko kuna koliko Mirjana ima lipa, i onoliko lipa koliko Mirjana ima kuna. Kolika je Tamarina uštеđevina?

Rješenje. Neka Tamara ima x kuna i y lipa. Tada Mirjana ima y kuna i x lipa. Nadalje ćemo sve računati u lipama. Tamara ima $100x + y$ lipa, a Mirjana $100y + x$ lipa. Prema danom uvjetu imamo

$$100y + x - 5 = 2(100x + y),$$

odakle nakon sređivanja dobivamo

$$98(y - 2x) = 3x + 5.$$

Promatramo dva slučaja.

1° Ako je $y - 2x = 1$ tada je $3x + 5 = 98$, pa je $x = 31$, $y = 63$.

2° Ako je $y - 2x \geq 2$ imamo $3x + 5 \geq 2 \cdot 98 = 196$, tj. $x \geq \dfrac{191}{3}$.

Sada je $y \geq 2 + 2x \geq 2 + 2 \cdot \dfrac{191}{3} > 100$, što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Dakle, Tamarina uštеđevina je 31 kuna i 63 lipe.

Zadatak 4. Neka je a cijeli broj relativno prost s 35. Dokaži da je broj $(a^4 - 1)(a^4 + 15a^2 + 1)$ djeljiv s 35.

Rješenje. Kako je najveći zajednički djelitelj brojeva a i 35 jednak 1, to je najveći zajednički djelitelj brojeva a i 5, kao i a i 7 jednak 1.

Svaki cijeli broj a relativno prost s 5 može se zapisati u jednom od oblika: $5k \pm 1$ ili $5k \pm 2$, a onaj relativno prost sa 7 može se zapisati u obliku: $7k \pm 1$, $7k \pm 2$ ili $7k \pm 3$. S druge strane, dani broj se može zapisati ovako:

$$\begin{aligned}
& (a^4 - 1)\left((a^4 + a^2 + 1) + 14a^2\right) \\
= \;& (a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1) + 14a^2(a^4 - 1) \\
= \;& (a^6 - 1)(a^2 + 1) + 14a^2(a^4 - 1).
\end{aligned}$$

Sada se lako provjeri da je svaki od ova dva sumanda djeljiv i s 5 i sa 7, tj. da je djeljiv s 35:

$$\begin{aligned}
a = 5k \pm 1 \;&\Rightarrow\; a^2 = 5M + 1 \;\Rightarrow\; 5 | a^2 - 1 \\
a = 5k \pm 2 \;&\Rightarrow\; a^2 = 5M + 4 \;\Rightarrow\; 5 | a^2 + 1,
\end{aligned}$$

odakle slijedi da $5 | a^4 - 1$. Zato je drugi sumand djeljiv s 35.

Nadalje, prvi sumand je djeljiv s 5, pa treba još pokazati da je djeljiv i sa 7.

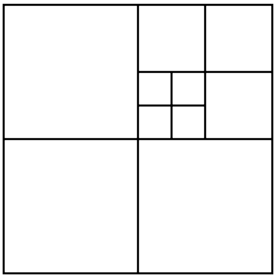
$$\begin{aligned}
a = 7k \pm 1 \;&\Rightarrow\; a^2 = 7M + 1 \;\Rightarrow\; 7 | a^2 - 1 \\
a = 7k \pm 2 \;&\Rightarrow\; a^2 = 7M + 4 \;\Rightarrow\; a^4 = 7N + 2 \;\Rightarrow\; a^6 = 7W + 1 \\
a = 7k \pm 3 \;&\Rightarrow\; a^2 = 7M + 2 \;\Rightarrow\; a^4 = 7N + 4 \;\Rightarrow\; a^6 = 7W + 1,
\end{aligned}$$

odakle slijedi $7 | a^6 - 1$.

Napomena. U dokazu se može se koristiti i mali Fermatov teorem.

Zadatak 5. Može li se kvadrat podijeliti na 2008 kvadrata (ne nužno istih duljina stranica)? Ako može navedi primjer, a ako ne može dokaži!

Rješenje. Pokazat ćemo metodom matematičke indukcije da se za svako $n = 1 + 3k,\ k \geq 0$ kvadrat može podijeliti na n manjih kvadrata.



Za $k = 0$ tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da za neki $n = 1 + 3k,\ k \geq 0$ tvrdnja vrijedi. Podijelimo li jedan od kvadrata na četiri jednaka kvadrata, broj kvadrata povećao se za 3, pa ih ukupno ima $n = 1 + 3k + 3 = 1 + 3(k + 1)$, što znači da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Kako je $2008 = 1 + 3 \cdot 669$, kvadrat se može podijeliti na 2008 manjih kvadrata.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija,
7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$(\sqrt{x}-2)^4+(\sqrt{x}-3)^4=1.$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $t=\sqrt{x}-2$. Tada redom imamo:

$$\begin{gathered}
t^4+(t-1)^4=1,\\
t^4-1+(t-1)^4=0,\\
(t-1)(t+1)(t^2+1)+(t-1)^4=0,\\
(t-1)\left[(t+1)(t^2+1)+(t-1)^3\right]=0,\\
(t-1)(t^3+t^2+t+1+t^3-3t^2+3t-1)=0,\\
2t(t-1)(t^2-t+2)=0.
\end{gathered}$$

Jednadžba $t^2-t+2=0$ nema realnih rješenja pa su jedina realna rješenja dobivene jednadžbe $t_1=0$ i $t_2=1$.
Za $t_1=0$ iz $\sqrt{x}-2=0$ dobivamo $x_1=4$, a za $t_2=1$ iz $\sqrt{x}-2=1$ slijedi $x_2=9$.

Zadatak 2. Za kvadratnu funkciju $f(x)=ax^2+bx+c$ vrijede ove nejednakosti

$$f(-3)<-5, \qquad f(-1)>0, \qquad f(1)<4.$$

Dokaži da je koeficijent a manji od $-\dfrac{1}{8}$.

Rješenje. Uvrštavanjem u danu funkciju dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(-3)&=9a-3b+c,\\
f(-1)&=a-b+c,\\
f(+1)&=a+b+c.
\end{aligned}$$

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

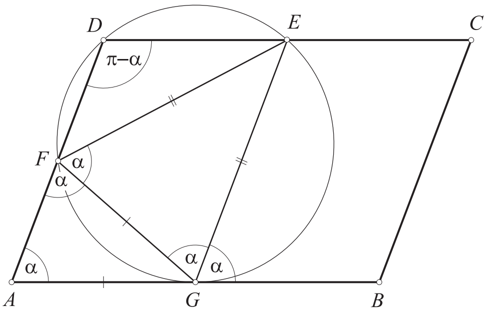
$$\begin{gathered}
9a-3b+c<-5,\\
a-b+c>0,\\
a+b+c<4.
\end{gathered}$$

Drugu nejednadžbu pomnožimo s -2, a zatim sve tri zbrojimo. Dobijemo $a<-\dfrac{1}{8}$.

Zadatak 3. Točke E, F, G su redom polovišta stranica $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AB}$ paralelograma $ABCD$. Kružnica opisana trokutu DEF dira stranicu $\overline{AB}$ u točki G. Nađi omjer duljina stranica danog paralelograma ($|AB| : |AD|$).

Rješenje.

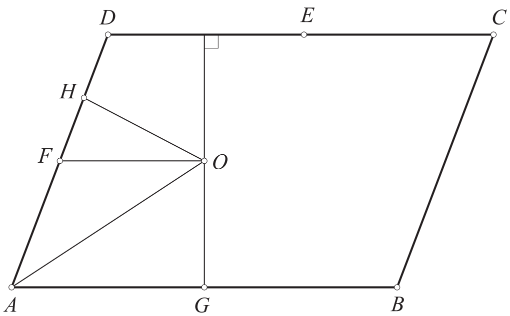
Prvo rješenje. Neka je $\sphericalangle BAD = \alpha$, $|AB| = a$, $|AD| = b$. Vrijedi, $\sphericalangle EGB = \alpha$, $\sphericalangle ADE = \pi - \alpha$. Četverokut $DFGE$ je tetivan, $\sphericalangle FGE = \alpha$, te je $\sphericalangle AGF = \pi - 2\alpha$. Zato je $\sphericalangle GFA = \alpha$. Trokut AGF je jednakokračan i $|AG| = |FG|$. Budući da je kut između tetive $\overline{EG}$ i tangente AB jednak obodnom kutu nad tetivom, slijedi $\sphericalangle EFG = \alpha$. Stoga je i trokut EFG jednakokračan pa su trokuti EFG i GAF slični.



Odavde slijedi

$$\frac{|EG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|AF|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Drugo rješenje.
Neka je O središte kružnice opisane trokutu DEF, a r njezin polumjer. O leži na simetralama stranica trokuta. Kako kružnica dira $\overline{AB}$ u G, središte O leži i na okomici na AB kroz točku G. Zaključujemo da se ta okomica podudara sa simetralom dužine $\overline{DE}$. Neka je H polovište dužine $\overline{DF}$. Tada je HO okomito na AD.



Iz pravokutnih trokuta AGO i AHO izrazimo $|AO|$:

$$|AO|^2 = |AG|^2 + |OG|^2 \quad = \quad |AH|^2 + |HO|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 \quad = \quad \left(\frac{3}{4}b\right)^2 + |HO|^2.$$

Duljinu $|HO|$ izrazit ćemo iz pravokutog trokuta FHO:

$$|HO|^2 = |FO|^2 - |FH|^2 = r^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2.$$

Sada imamo:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 = \left(\frac{3}{4}b\right)^2 + r^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2,$$

odakle slijedi $a^2 = 2b^2$, tj. $|AB| : |AD| = a : b = \sqrt{2}$.

Treće rješenje.
Brže je rješenje pomoću potencije točke u odnosu na kružnicu. Naime vrijedi,

$$|AF| \cdot |AD| = |AG|^2$$

odakle dobivamo $\dfrac{b}{2} \cdot b = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ tj. $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$.

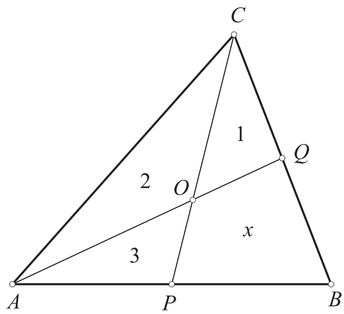
Zadatak 4. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su redom točke P i Q. Dužine $\overline{AQ}$ i $\overline{CP}$ sijeku se u točki O.

Ako su površine trokuta COQ, AOC i APO redom jednake 1 cm^2, 2 cm^2 i 3 cm^2, odredi površinu četverokuta $OPBQ$.

Rješenje. Površine trokuta koji imaju zajedničku visinu odnose se kao duljine njihovih osnovica. Stoga je

$$\frac{2}{1} = \frac{P(AOC)}{P(OQC)} = \frac{|AO|}{|OQ|} = \frac{P(AOP)}{P(OQP)} = \frac{3}{P(OQP)}.$$

Odavde je $P(OQP) = 1.5$ cm^2.



Označimo li $P(OPBQ) = x$, imamo $P(PBQ) = P(OPBQ) - P(OQP) = x - 1.5$, pa je

$$\frac{5}{x+1} = \frac{P(APC)}{P(PBC)} = \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{P(APQ)}{P(PBQ)} = \frac{4.5}{x-1.5}.$$

Rješenje jednadžbe

$$\frac{5}{x+1} = \frac{4.5}{x-1.5}$$

je $x = 24$ i površina četverokuta $OPBQ$ je 24 cm^2.

Zadatak 5. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Rješenje. Kako je $29^2 = 841$, svaki složeni broj, koji je manji od 840, djeljiv je barem s jednim prostim brojem koji nije veći od 23. Ima samo devet prostih brojeva (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i 23) koji nisu veći od 23. Kako ima deset složenih brojeva koji su manji od 840, po Dirichletovom principu postoje dva među njima koja su djeljiva s istim prostim brojem koji nije veći od 23. Ta dva broja nisu relativno prosta.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija,
7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\log_2 5 \cdot \log_5 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) > 1.$$

Rješenje. Izraz pod logaritmom je pozitivan jer ne mogu oba korijena istovremeno biti jednaka nuli, a da bi sve bilo definirano treba biti $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ i $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, odakle dobivamo $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Primijetimo da je $\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}$, pa nejednadžba prelazi u

$$\log_5 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) > \log_5 2,$$

odakle dobivamo

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > 2,$$

odnosno nakon svođenja na zajednički nazivnik,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 1, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{1-x^2} < 1.$$

Ovo je ispunjeno za $x \neq 0$.

Rješenja nejednadžbe su $x \in \langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle$.

Drugo rješenje.

Moraju biti zadovoljeni uvjeti $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ i $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, odakle se dobiva $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Primjenom A-G nejednakosti za dva broja vidimo da je

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = 2.$$

Jednakost se postiže za $\frac{1-x}{1+x} = 1$, tj. $x = 0$, pa mora biti $x \neq 0$.

Dakle, rješenje nejednadžbe je $x \in \langle -1, 1 \rangle \setminus \{0\}$.

Zadatak 2. Za koje realne brojeve a postoji rješenje jednadžbe

$$\cos 3x \cdot \cos^3 x - \sin 3x \cdot \sin^3 x = a\,?$$

Rješenje. Kako je $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, dana jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned}
\cos 3x \cdot \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} - \sin 3x \cdot \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} &= a,\\
\cos^2 3x + 3\cos 3x \cos x + \sin^2 3x - 3\sin 3x \sin x &= 4a,\\
1 + 3(\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) &= 4a,\\
1 + 3\cos 4x &= 4a,\\
\cos 4x &= \frac{4a-1}{3}.
\end{aligned}$$

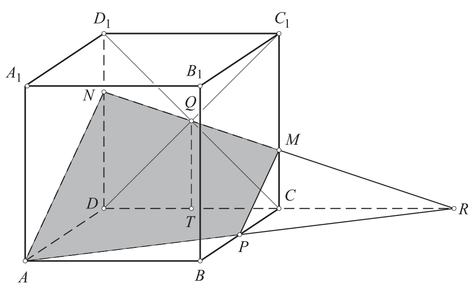
Da bi postojalo rješenje, mora biti zadovoljen uvjet

$$-1 \le \frac{4a-1}{3} \le 1,$$

dakle dobivamo $-\frac{1}{2} \le a \le 1$.

Zadatak 3. U kocki $ABCDA_1B_1C_1D_1$ točka P je polovište brida $\overline{BC}$, a točka Q je središte kvadrata CC_1D_1D. Ravnina kroz točke A, P i Q dijeli kocku na dva dijela. Koliki je omjer njihovih obujmova?

Rješenje. Presjek ravnine i kocke je četverokut $APMN$. Presjek pravca CD i ravnine je točka R, a T je polovište brida $\overline{CD}$. Duljinu brida kocke označimo s a, njezin obujam s V, obujam krnje piramide $ADNPCM$ s V_1, a obujam preostalog dijela kocke s V_2.



Trokuti ARD i PRC su slični pa vrijedi

$$\frac{|RD|}{|RC|} = \frac{|DA|}{|CP|} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2,$$

odakle je $|RD| = 2|RC| \quad \Rightarrow \quad |RC| = |CD| = a$.

Iz sličnosti trokuta QTR i MCR dobivamo

$$\frac{|QT|}{|CM|} = \frac{|RT|}{|RC|} = \frac{a + \frac{a}{2}}{a} = \frac{3}{2},$$

odakle je $|CM| = \frac{2}{3}|QT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$.

Analogno se dobije $|DN| = 2|CM| = \frac{2a}{3}$.

Sada je obujam krnje piramide

$$V_1 = V_{ADNR} - V_{PCMR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|DA| \cdot |DN|}{2} \cdot |DR| - \frac{1}{3} \cdot \frac{|CP| \cdot |CM|}{2} \cdot |RC| = \frac{7a^3}{36}.$$

Konačno dobivamo

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{\frac{7a^3}{36}}{a^3 - \frac{7a^3}{36}} = \frac{7}{29}.$$

Zadatak 4. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostala dva kuta. Odredi duljine stranica trokuta.

Rješenje. Neka je $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$. Tada je $\alpha < \beta < \gamma$. Moguća su tri slučaja.

1° $\beta = 2\alpha$

Koristeći poučak o sinusima i kosinusov poučak dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2a} = \frac{n}{2(n-1)},$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}.$$

Iz jednadžbe $\frac{n}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$ dobivamo $n = 2$. Stranice trokuta bi bile 1, 2 i 3, što nije moguće.

2° $\gamma = 2\alpha$

Slično kao u prethodnom slučaju dobili bismo:

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{n+1}{2(n-1)},$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}.$$

Iz jednadžbe $\frac{n+1}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$ se dobiva $n = 5$ i duljine stranica trokuta su 4, 5 i 6.

3° $\gamma = 2\beta$

Ponavljanjem postupka iz prethodnih dvaju slučajeva dobivamo

$$\cos\beta = \frac{\sin 2\beta}{2\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{n+1}{2n},$$

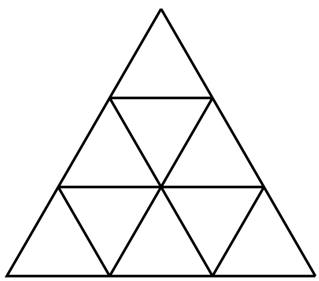
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}.$$

Iz jednadžbe $\frac{n+1}{2n} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2-3n-1=0$, čija rješenja $n_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ su iracionalna.

Dakle, jedino rješenje je trokut sa stranicama duljina 4, 5 i 6.

Zadatak 5. U jednakostraničnom trokutu duljine stranice 3 cm nalazi se 20 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera $\frac{3}{5}$ cm koji prekriva barem 3 od tih točaka.

Rješenje.



Podijelimo dani trokut na 9 jednakostraničnih trokutića stranice duljine 1, kao na slici. Svaki od 9 trokutića možemo pokriti krugom polumjera

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1.73}{3} < 0.6 = \frac{3}{5}.$$

Ovih 9 krugova pokrivaju polazni jednakostranični trokut. Budući da je u trokutu izabrano 20 točaka, po Dirichletovom principu zaključujemo da su neke tri od izabranih točaka prekrivene istim krugom.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija,
7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Dokaži da za prirodni broj n, $n > 5$ vrijede nejednakosti

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Dokazujemo matematičkom indukcijom. Za $n = 6$ tvrdnja je istinita:

$$2^6 = 64 < 6! = 720 < 729 = 3^6.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n.

Dokažimo najprije nejednakost zdesna. Onda je

$$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

pa je dovoljno dokazati

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \iff 2n^n < (n+1)^n.$$

Posljednja nejednakost je istinita, jer slijedi npr. iz binomnog razvoja

$$(n+1)^n = n^n + \binom{n}{1}n^{n-1} + \ldots > 2n^n.$$

Dokažimo sad nejednakost slijeva. Prema pretpostavci indukcije, vrijedi

$$(n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n < (n+1) \cdot n!$$

zato je dovoljno dokazati da vrijedi:

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} < (n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Ova je nejednakost ekvivalentna s

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Niz slijeva je rastući s limesom $e < 3$, pa je tvrdnja dokazana.

Bez pozivanja na ovu tvrdnju, nejednakost se može dokazati direktno:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.
\end{aligned}$$

Zadatak 2. Dokaži formulu (n je prirodni broj):

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Odredi formulu za zbroj

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor.$$

Tu je $\lfloor r\rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od r.

Rješenje. Dokaz prve formule lako se dobije matematičkom indukcijom.

Označimo sa S_n traženi zbroj. Nekoliko prvih pribrojnika u toj sumi izgleda ovako:

$$S_n=1+1+1+2+2+2+2+2+3+3+\ldots.$$

S obzirom da je

$$(n-1)^2<n^2-1<n^2,$$

vrijedi

$$n-1\le\lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor<n,$$

pa je posljednji pribrojnik u ovoj sumi jednak $n-1$.

Postavlja se pitanje: ako je $1\le k\le n-1$, koliko će se puta u sumi pojaviti pribrojnik k? Tu će vrijednost imati sljedeći članovi sume:

$$\lfloor\sqrt{k^2}\rfloor,\quad\lfloor\sqrt{k^2+1}\rfloor,\ldots,\quad\lfloor\sqrt{(k+1)^2-1}\rfloor.$$

Dakle, pribrojnik k pojavljuje se $(k+1)^2-k^2$ puta. Primijetimo da je posljednji član sume jednak $\sqrt{n^2-1}$, pa je on ujedno posljednji član u ovakvoj skupini pribrojnika. Zato je tražena suma jednaka:

$$S_n=1\cdot(2^2-1^2)+2(3^2-2^2)+\ldots+(n-1)[n^2-(n-1)^2].$$

Izračunajmo ovaj zbroj.

$$\begin{aligned}S_n&=2^2-1^2+2\cdot3^2-2\cdot2^2+3\cdot4^2-3\cdot3^2+\ldots+(n-1)n^2-(n-1)(n-1)^2\\&=-1^2-2^2-3^2-\ldots-(n-1)^2+(n-1)n^2\\&=(n-1)n^2-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Zadatak 3. Niz (x_n) definiran je rekurzivnom formulom

$$x_0 = \alpha,$$
$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}, \qquad n \geq 0.$$

a) Dokaži da je za svaki pozitivni broj α niz (x_n) konvergentan i izračunaj mu limes.

b) Za koji realni broj α je ovaj niz konstantan?

Rješenje. a) Promotrimo nejednakost $x_1 > x_0$. Ona je ekvivalentna s

$$\sqrt{1+\alpha} > \alpha \iff \alpha^2 - \alpha - 1 < 0$$

Budući je α pozitivan, nejednakost će biti zadovoljena ako je

$$0 < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ako je α pozitivan broj manji od $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, onda vrijedi $x_1 > x_0$ pa je

$$1 + x_1 > 1 + x_0 \implies \sqrt{1+x_1} > \sqrt{1+x_0} \implies x_2 > x_1.$$

Sad zaključujemo da je u ovom slučaju niz (x_n) rastući. Pokažimo da je on omeđen. Za gornju među možemo uzeti bilo koji broj koji nije manji od $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Na primjer, dokažimo da je gornja međa broj 2. Vrijedi

$$x_0 = \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2,$$
$$x_1 = \sqrt{1+x_0} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2,$$

i svaki sljedeći član je manji od 2. Dokazujemo matematičkom indukcijom:

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2.$$

Niz koji je rastući i omeđen ima limes. Označimo taj limes s L.

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \implies L = \sqrt{1+L}$$

i odavde je $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Na potpuno isti način dokazujemo konvergenciju ako je $\alpha > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tada je $x_1 < x_0$, pa je onda

$$x_2 = \sqrt{1+x_1} < \sqrt{1+x_0} = x_1$$

i indukcijom zaključujemo da je niz padajući. On je omeđen odozdo, recimo konstantom 1, jer mu je svaki član očigledno veći od 1. I u ovom slučaju dobivamo isti limes.

b) Niz će biti konstantan ako je $x_1 = x_0$, a to vrijedi za $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zadatak 4. **a)** Dokaži da se duljina težišnice izražava pomoću duljina njegovih stranica formulom

$$t_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2.$$

b) U trokutu DEF duljine stranica jednake su duljinama težišnica trokuta ABC. Ako je trokut DEF tupokutan, dokaži da je tada najmanji kut trokuta ABC manji od $45°$.

Rješenje.a) Iz poučka o kosinusu vrijedi

$$c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot t_a \cos\varphi,$$
$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot t_a \cos(\pi - \varphi).$$

Ovdje je φ kut koji težišnica t_a zatvara sa stranicom a trokuta. Zbrajanjem dobivamo traženu formulu.

b) Veze između duljina težišnica i duljina stranica trokuta su:

$$t_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \qquad t_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \qquad t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Neka je t_a najdulja od težišnica trokuta ABC, dakle, najdulja stranica trokuta DEF. Ako je DEF tupokutan, onda mora biti

$$t_a^2 > t_b^2 + t_c^2.$$

Uvrstimo u ovu nejednakost prijašnje formule. Dobivamo

$$5a^2 < b^2 + c^2.$$

Zato za kut α u trokuta ABC vrijedi

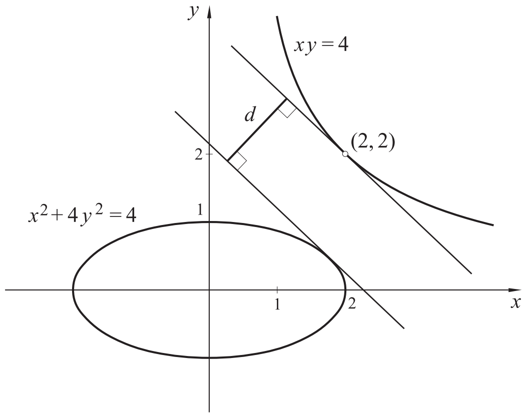
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > \frac{2(b^2 + c^2)}{5bc} = \frac{2}{5}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa je $\alpha < 45°$.

Zadatak 5. Neka je A točka na hiperboli $xy = 4$, a B točka na elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$. Dokaži da vrijedi

$$|AB| > \frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Rješenje.



Krivulje su centralnosimetrične pa je dovoljno promatrati situaciju u I. kvadrantu.

Tangenta na hiperbolu $xy = 4$ u točki $(2, 2)$ ima jednadžbu $y = 4 - x$, jer zbog simetričnosti parabole u odnosu na pravac $y = x$, hiperbola ima nagib -1. Odsječak pravca na ordinati je 4, jer točka $(2, 2)$ leži na tangenti.

Sada povlačimo tangentu na elipsu paralelnu toj tangenti. Ona će imati jednadžbu $y = -x + l$.

Iz uvjeta diranja pravca i elipse slijedi

$$a^2k^2 + b^2 = l^2, \qquad 4 + 1 = l^2,$$

pa je $l = \sqrt{5}$. Jednadžba tangente na elipsu glasi $y = \sqrt{5} - x$.

Sada ćemo izračunati udaljenost ovih dvaju pravaca. Ona je jednaka udaljenosti točke $(2, 2)$ od tangente na elipsu:

$$d = \left|\frac{2+2-\sqrt{5}}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Udaljenost između točaka A i B sigurno je veća od ove udaljenosti, jer točka u kojoj tangenta na elipsu dira elipsu ne leži na pravcu $y = x$.