ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

7. ožujka 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Riješi jednadžbu

$$\frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3} = \frac{2a+1}{a^3+2a^2+a}x$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje.
Da bi sve operacije bile definirane mora biti $a \neq 0$ i $a \neq -1$. (2 boda)

Množenjem jednadžbe s $a(a+1)^3$ i sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} (6a+1)(a+1)^3x - (2a+1)(a+1)x + 6a^2(a+1)^2 + a^3 &= 0 \\ x(a+1)[(6a+1)(a+1)^2 - (2a+1)] + a^2[6(a+1)^2 + a] &= 0 \\ x(a+1)(6a^3 + 13a^2 + 6a) + a^2(6a^2 + 13a + 6) &= 0 \\ (2a+3)(3a+2)[xa(a+1) + a^2] &= 0. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Za $a \in \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$ jednadžba je neodređena, tj. zadovoljena je za svaki $x \in \mathbb{R}$. (4 boda)

Za $a \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, 0, -1\right\}$ jednadžba ima rješenje $x = -\frac{a}{a+1}$. (4 boda)

Napomena. Učenik koji bez diskusije dobije rješenje $x = -\frac{a}{a+1}$, dobiva najviše 12 bodova.

Zadatak 2. Dokaži da za svaki realan broj x, $x > -1$, vrijedi nejednakost

$$\frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{1 + x^5} \leq 2.$$

Rješenje.
Dana nejednakost je ekvivalentna sa

$$\frac{2 + 2x^5 - x - x^2 - x^3 - x^4}{1 + x^5} \geq 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je $1 + x^5 > 0$ za $x > -1$ dovoljno je dokazati nejednakost

$$S = 2 + 2x^5 - x - x^2 - x^3 - x^4 \geq 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Imamo:

$$
\begin{aligned}
S &= (1-x)+(1-x^2)+(x^5-x^3)+(x^5-x^4) \\
&= (1-x)+(1-x^2)+x^3(x^2-1)+x^4(x-1) \\
&= (1-x)(1-x^4)+(1-x^2)(1-x^3) \\
&= (1-x)(1-x^2)(1+x^2)+(1-x^2)(1-x)(1+x+x^2) \\
&= (1-x)(1-x^2)(2+x+x^2) \\
&= (1-x)^2(1+x)(2x^2+x+2).
\end{aligned}
$$

(12 bodova)

Sada je očito da je za svaki $x > -1$ izraz S prikazan kao produkt nenegativnih faktora, pa je $S \geq 0$, što je i trebalo dokazati. (4 boda)

Zadatak 3. Dokaži da je za svaki prirodan broj n izraz $n^{19} - n^7$ djeljiv s 30.

Rješenje.
Označimo $A = n^{19} - n^7$. Faktorizacijom dobivamo

$$
\begin{aligned}
A &= n^7(n^{12}-1) \;=\; n^7(n^6-1)(n^6+1) \\
&= n^7(n-1)(n+1)(n^4+n^2+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1) \\
&= (n-1)n(n+1)(n^2+1)\cdot B, \quad B \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

(5 bodova)

Kako su n i $n+1$ uzastopni prirodni brojevi, jedan od njih je paran. (5 bodova)

Jedan od tri uzastopna cijela broja, $n-1$, n, $n+1$ je djeljiv s 3. (5 bodova)

Ako je $n = 5k,\ k \in \mathbb{N}$, n^2 je djeljiv s 5.

Ako je $n = 5k \pm 1,\ k \in \mathbb{N}$, $n^2 - 1$ je djeljiv s 5.

Ako je $n = 5k \pm 2,\ k \in \mathbb{N}$, $n^2 + 1$ je djeljiv s 5. (5 bodova)

Dakle, $(n-1)n(n+1)$ je djeljiv i s 2 i s 3 i s 5 pa je onda i A djeljiv s $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

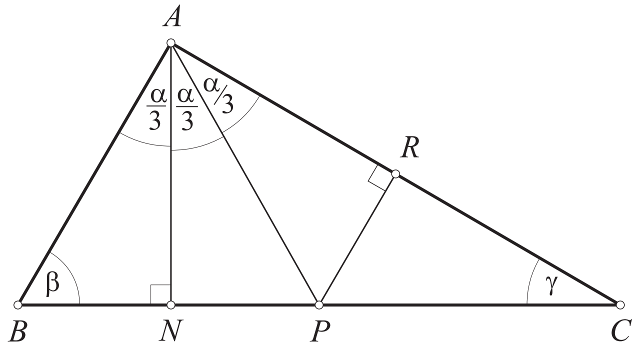
Napomena 1. Djeljivost s 10 može se dokazati promatranjem zadnje znamenke. U tom slučaju dati 10 bodova, za djeljivost s 2 i 5.

Napomena 2. Djeljivost s 5 može se dokazati i pomoću Fermatovog teorema.

Zadatak 4. Težišnica i visina iz vrha A trokuta ABC dijele kut kod vrha A na tri jednaka dijela. Koliki su kutovi trokuta ABC?

Prvo rješenje.

Označimo s N nožište visine iz vrha A, s P polovište stranice $\overline{BC}$, s R nožište okomice iz P na $\overline{AC}$, $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$.



Trokuti BNA i PNA su sukladni (stranica i dva kuta) odakle dobivamo

$$|AB| = |AP| = c, \quad |BN| = |NP| = \frac{1}{2}|BP| = \frac{a}{4}.$$

(4 boda)

Nadalje, iz sukladnosti trokuta PNA i PRA (stranica i dva kuta) je

$$|AR| = |AN| \quad \text{i} \quad |PR| = |PN| = \frac{a}{4}.$$

(4 boda)

Po Pitagorinom poučku za trokut PRC je

$$|RC|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad |RC| = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

(4 boda)

Iz sličnosti trokuta ANC i PRC (dva kuta) imamo

$$\frac{|NC|}{|AN|} = \frac{|RC|}{|PR|} \quad \text{tj.} \quad \frac{\frac{3a}{4}}{|AN|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a}{4}}$$

odakle je $|AR| = |AN| = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = |RC|$. (4 boda)

Odavde dobivamo da su trokuti PRA i PRC sukladni (stranica i dva kuta), pa je $\gamma = \dfrac{\alpha}{3}$.

Iz trokuta BNA imamo $\beta + \dfrac{\alpha}{3} = 90°$ odakle je $\beta + \gamma = 90°$. Napokon iz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ dobivamo $\alpha = 90°$, $\gamma = 30°$ i $\beta = 60°$. (4 boda)

Drugo rješenje.
Uz oznake na slici, prema poučku o simetrali kuta vrijedi: $|AN| : |AC| = |NP| : |PC|$,

(5 bodova)

tj. $|AC| = 2|AN|$, (5 bodova)

pa kako je $\sphericalangle ANC = 90^\circ$ uočavamo da je trokut ANC polovica jednakostraničnog trokuta, pa je $\gamma = 30^\circ$, (5 bodova)

$\frac{2}{3}\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ i konačno $\beta = 60^\circ$. (5 bodova)

Zadatak 5. Hipotenuza $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC ima duljinu 6. Kvadrat je upisan u taj trokut tako da mu dva vrha leže na hipotenuzi, a druga dva vrha na katetama.

(a) Dokaži da površina kvadrata nije veća od 4.

(b) Za kakav trokut je ta površina jednaka 4?

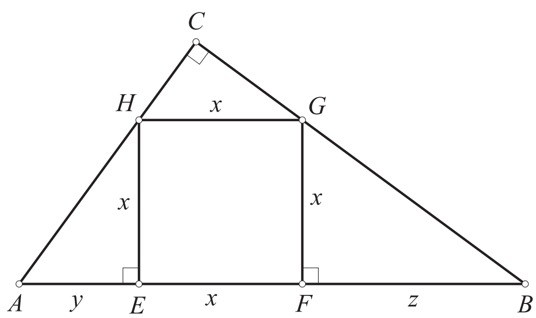
Rješenje.
(a) Trokuti AEH i GBF su slični, pa je

$$\frac{|EH|}{|AE|} = \frac{|FB|}{|GF|} \quad \text{tj.} \quad \frac{x}{y} = \frac{z}{x},$$

odnosno

$$y = \frac{x^2}{z}.$$

(10 bodova)



Vrijedi

$$6 = x + \frac{x^2}{z} + z \geq x + 2\sqrt{\frac{x^2}{z} \cdot z} = x + 2x = 3x.$$

Dakle, $x \leq 2$. (5 bodova)

(b) Jednakost se dostiže samo ako je $\frac{x^2}{z} = z$ tj. $x = z = y$, odnosno za jednakokračan pravokutan trokut. (5 bodova)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

7. ožujka 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Ako su u i v kompleksni brojevi, dokaži nejednakost

$$(1+uv)(1+\bar{u}\bar{v}) \leq (1+u\bar{u})(1+v\bar{v}).$$

Rješenje.
Neka je $u = a + bi$, $v = c + di$. Označimo $L = (1+uv)(1+\bar{u}\bar{v})$, $D = (1+u\bar{u})(1+v\bar{v})$.
Sada imamo:

$$\begin{aligned}
L &= [1+(a+bi)(c+di)]\,[1+(a-bi)(c-di)] \\
&= [1+ac-bd+(ad+bc)i]\,[1+ac-bd-(ad+bc)i] \\
&= (1+ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \\
&= 1+a^2c^2+b^2d^2+2ac-2bd-2abcd+a^2d^2+2abcd+b^2c^2 \\
&= 1+a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2+2ac-2bd.
\end{aligned}$$

(6 bodova)

$$\begin{aligned}
D &= [1+(a+bi)(a-bi)]\,[1+(c+di)(c-di)] \\
&= (1+a^2+b^2)(1+c^2+d^2) \\
&= 1+a^2+b^2+c^2+a^2c^2+b^2c^2+d^2+a^2d^2+b^2d^2.
\end{aligned}$$

(6 bodova)

Tada je

$$D-L = (a^2-2ac+c^2)+(b^2+2bd+d^2) = (a-c)^2+(b+d)^2 \geq 0.$$

Odavde slijedi da je zaista $L \leq D$. (8 bodova)

Drugo rješenje.

$$
\begin{aligned}
& (1+uv)(1+\bar{u}\bar{v}) \leq (1+u\bar{u})(1+v\bar{v}) \\
\Leftrightarrow \quad & uv + \bar{u}\bar{v} \leq u\bar{u} + v\bar{v} \\
\Leftrightarrow \quad & (u-\bar{v})(\bar{u}-v) \geq 0
\end{aligned}
$$

(10 bodova)

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & (u-\bar{v})\overline{(u-\bar{v})} \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & |u-\bar{v}|^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

što uvijek vrijedi. (10 bodova)

Zadatak 2. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$x^2 + x + \sqrt{x^2+x+7} = 5.$$

Prvo rješenje.
Stavimo $t = x^2 + x + 7$. Mora biti $t \geq 0$. (2 boda)

Jednadžba poprima oblik $t - 7 + \sqrt{t} = 5$, ili $\sqrt{t} = 12 - t$. $(*)$ (2 boda)

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - 25t + 144 = 0,$$

čija su rješenja $t_1 = 9$ i $t_2 = 16$. (6 bodova)

Jednadžbu $(*)$ zadovoljava samo t_1. (4 boda)

Tada je $x^2 + x + 7 = 9$, tj. $x^2 + x - 2 = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$.

(6 bodova)

Napomena. Učenik koji ne isključi rješenja jednadžbe $x^2 + x - 9 = 0$ gubi 4 boda.

Drugo rješenje.
Zapišimo jednadžbu u obliku

$$\sqrt{x^2+x+7} = 5 - (x^2 + x).$$

Kvadriranjem dobivamo jednadžbu

$$x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 11x + 18 = 0. \qquad (1)$$

(2 boda)

Pokušajmo odrediti neka rješenja ove jednadžbe. Uočavamo da $x = 1$ zadovoljava jednadžbu, jer vrijedi $1 + 2 - 10 - 11 + 18 = 0$.

Stoga polinom na lijevoj strani možemo podijeliti s $(x-1)$, pa dobivamo

$$(x-1)(x^3 + 3x^2 - 7x - 18) = 0.$$

(6 bodova)

Daljnjim pokušajima utvrđujemo da je $x = -2$ nultočka dobivenog kubnog polinoma, pa je djeljiv s $(x+2)$. Sada imamo

$$(x-1)(x+2)(x^2+x-9) = 0. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Dobivamo četiri rješenja, 1, -2, $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{37})$ jednadžbe (1).

Sada treba provjeriti koja od njih zadovoljavaju i danu jednadžbu.

$x = 1 \ldots x^2 + x + \sqrt{x^2+x+7} = 1^2 + 1 + \sqrt{1^2+1+7} = 1 + 1 + 3 = 5.$

$x = -2 \ldots x^2 + x + \sqrt{x^2+x+7} = 2^2 - 2 + \sqrt{2^2-2+7} = 4 - 2 + 3 = 5.$ (2 boda)

Za $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{37})$ vrijedi

$x^2 + x = 9$, pa je $x^2 + x + \sqrt{x^2+x+7} = 9 + \sqrt{16} = 13 \neq 5.$ (4 boda)

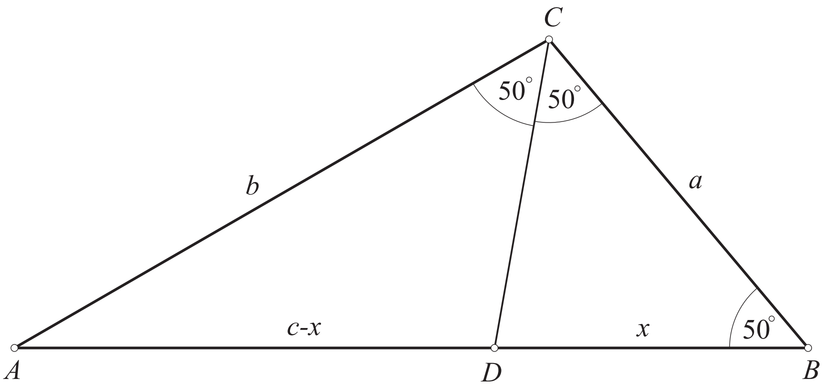
Polaznu jednadžbu zadovoljavaju samo $x = 1$ i $x = -2$.

Zadatak 3. Duljine stranica trokuta su a, b i c, a veličine kutova nasuprot stranica duljina b i c su $\beta = 50^\circ$ i $\gamma = 100^\circ$. Dokaži jednakost

$$ab = c^2 - b^2.$$

Rješenje.

Simetrala kuta $\sphericalangle C$ trokuta ABC siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Označimo $x = |BD|$. Tada je i $|CD| = x$, jer je trokut BCD jednakokračan.



Trokuti ABC i ACD su slični (isti kutovi) pa je $\dfrac{|BC|}{|CD|} = \dfrac{|CA|}{|AD|} = \dfrac{|AB|}{|CA|}$, tj.

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c-x} = \frac{c}{b}. \qquad \text{(10 bodova)}$$

Odatle slijedi

$$x = \frac{ab}{c} \quad \text{i} \quad c(c-x) = b^2.$$

odakle konačno dobivamo

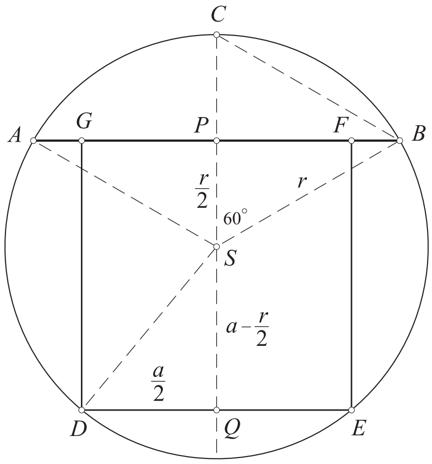
$$c\left(c-\frac{ab}{c}\right)=b^2,$$

odnosno traženu jednakost $c^2-ab=b^2$. (10 bodova)

Napomena. Zadatak se može riješiti i trigonometrijski.

Zadatak 4. Tetiva $\overline{AB}$ dijeli krug polumjera r na dva dijela čije se pripadne duljine kružnih lukova odnose kao $1:2$. U veći od ta dva dijela upisan je kvadrat čija jedna stranica leži na toj tetivi. Odredi duljinu stranice tog kvadrata.

Rješenje.
Kako su duljine kružnih lukova u omjeru $1:2$ i njihovi središnji kutovi moraju biti u istom omjeru. Zato je $\sphericalangle ASB=120^\circ$. (2 boda)



(slika 3 boda)

Trokut SBC je jednakostraničan pa je $|SP|=\dfrac{r}{2}$ i $|SQ|=a-\dfrac{r}{2}$. (3 boda)

Iz trokuta SDQ imamo

$$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a-\frac{r}{2}\right)^2 \quad \text{tj.} \quad 5a^2-4ra-3r^2=0. \qquad \text{(7 bodova)}$$

Kako je duljina stranice kvadrata pozitivan broj, zadovoljava samo rješenje

$$a=\frac{2+\sqrt{19}}{5}r. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Napomena. Zadatak se može riješiti i analitički.

Zadatak 5. Ako se dvoznamenkastom broju pribroji umnožak njegovih znamenaka, dobije se kvadrat zbroja tih znamenaka. Odredi sve takve brojeve.

Prvo rješenje.
Ako s x označimo znamenku desetica, a s y znamenku jedinica traženog broja, tada ga možemo prikazati kao $10x + y$.

Zapišimo zadani uvjet:

$$10x + y + xy = (x + y)^2, \qquad \text{(4 boda)}$$

$x,\ y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},\ x \neq 0.$

Sredimo li ovu jednadžbu dobit ćemo

$$x^2 + (y - 10)x + (y^2 - y) = 0.$$

To je kvadratna jednadžba po x. Njezina diskriminanta mora biti nenegativna, tj.

$$(y - 10)^2 - 4 \cdot (y^2 - y) \geq 0 \quad \text{ili} \quad 3y^2 + 16y - 100 \leq 0. \qquad \text{(4 boda)}$$

Ova nejednadžba je zadovoljena za $y \in \{0, 1, 2, 3\}$, a nije zadovoljena za $y \geq 4$. (4 boda)

Preostaje promatrati ova četiri slučaja:

1° $y = 0,\ x^2 - 10x = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 10$, ne odgovara.

2° $y = 1,\ x^2 - 9x = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 9$, odgovara samo $x = 9$.

3° $y = 2,\ x^2 - 8x + 2 = 0$, x nije prirodan broj.

4° $y = 3,\ x^2 - 7x + 6 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 6$. (8 bodova)

Dakle, svi traženi brojevi su: 13, 63, 91.

Drugo rješenje.
Neka je traženi broj $\overline{xy} = 10x + y$, x, y su znamenke, i $x \neq 0$. Tražimo broj za koji vrijedi

$$(10x + y) + xy = (x + y)^2. \qquad \text{(4 boda)}$$

Sređivanjem dobivamo $x^2 + xy + y^2 - 10x - y = 0$, $y(y - 1) = x(10 - x - y)$.

Uvrštavanjem $y = 0, 1, \ldots, 9$ dobivamo

$y = 0$, $x(10 - x) = 0$ što ne odgovara uvjetu $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

$y = 1$, $x(9 - x) = 0$, $x = 9$, tj. $\overline{xy} = 91$.

$y = 2$, $x(8 - x) = 2$, $x^2 - 8x + 2 = 0$, $D = 56$, nema rješenja u $\mathbb{Z}$.

$y = 3$, $x(7 - x) = 6$, $x^2 - 7x + 6 = 0$, $x = 1$ i $x = 6$, tj. $\overline{xy} = 13$ i $\overline{xy} = 63$.

$y = 4$, $x(6 - x) = 12$, $x^2 - 6x + 12 = 0$, $D < 0$, nema rješenja.

$y = 5$, $x(5 - x) = 20$, $x^2 - 5x + 20 = 0$, $D < 0$, nema rješenja.

$y = 6$, $x(4 - x) = 30$, $x^2 - 4x + 30 = 0$, $D < 0$, nema rješenja.

$y = 7$, $x(3 - x) = 42$, $x^2 - 3x + 42 = 0$, $D < 0$, nema rješenja.

$y = 8$, $x(2 - x) = 56$, $x^2 - 2x + 56 = 0$, $D < 0$, nema rješenja.

$y = 9$, $x(1 - x) = 72$, $x^2 - x + 72 = 0$, $D < 0$, nema rješenja.

(16 bodova)

Treće rješenje.

Neka je traženi broj $\overline{xy} = 10x + y$, x, y su znamenke, i $x \neq 0$. Tražimo broj za koji vrijedi

$$(10x + y) + xy = (x + y)^2. \qquad \text{(4 boda)}$$

Možemo, umjesto toga, u jednadžbu $y(y-1) = x(10 - x - y)$ uvrštavati i $x = 1, 2, \ldots, 9$.

$x = 1$, $y(y-1) = 9 - y$, $y^2 = 9$, $y = 3$, tj. $\overline{xy} = 13$.

$x = 2$, $y(y-1) = 2(8 - y)$, $y^2 + y - 16 = 0$, $D = 65$, nema rješenja u $\mathbb{Z}$.

$x = 3$, $y(y-1) = 3(7 - y)$, $y^2 + 2y - 21 = 0$, $D = 88$, nema rješenja u $\mathbb{Z}$.

$x = 4$, $y(y-1) = 4(6 - y)$, $y^2 + 3y - 24 = 0$, $D = 105$, nema rješenja u $\mathbb{Z}$.

$x = 5$, $y(y-1) = 5(5 - y)$, $y^2 + 4y - 25 = 0$, $D = 116$, nema rješenja u $\mathbb{Z}$.

$x = 6$, $y(y-1) = 6(4 - y)$, $y^2 + 5y - 24 = 0$, $y = 3$, tj. $\overline{xy} = 63$.

$x = 7$, $y(y-1) = 7(3 - y)$, $y^2 + 6y - 21 = 0$, $D = 120$, nema rješenja u $\mathbb{Z}$.

$x = 8$, $y(y-1) = 8(2 - y)$, $y^2 + 7y - 16 = 0$, $D = 113$, nema rješenja u $\mathbb{Z}$.

$x = 9$, $y(y-1) = 9(1 - y)$, $y^2 + 8y - 9 = 0$, $y = 1$, tj. $\overline{xy} = 91$. (16 bodova)

Napomena. Za svaki ispušteni slučaj (bez obzira da li je zbog toga ispušteno rješenje ili ne) učenik gubi 2 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

7. ožujka 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Dani su realni brojevi a, b, c veći od 1. Dokaži sljedeću nejednakost

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

Rješenje.

Za x, $y > 1$ vrijedi $\log_y x = \dfrac{\log x}{\log y}$. (2 boda)

Neka je $x = \log a$, $y = \log b$, $z = \log c$. Zbog $a,\ b,\ c > 1$ vrijedi $x,\ y,\ z > 0$. (2 boda)

Polazna nejednakost može se zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq \frac{4x}{y+z} + \frac{4y}{z+x} + \frac{4z}{x+y}. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Dovoljno je pokazati

$$\frac{z}{x} + \frac{z}{y} \geq \frac{4z}{x+y}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Množenjem s $xy(x+y)$ i sređivanjem dobivamo $z(x-y)^2 \geq 0$, što vrijedi. Zato vrijedi i polazna nejednakost. (6 bodova)

Napomena. Nejednakost $\dfrac{z}{x} + \dfrac{z}{y} \geq \dfrac{4z}{x+y}$ slijedi i iz A-H nejednakosti.

Zadatak 2. Neka je $P(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$P(x^2 + 4x - 7) = 0,$$

ako je poznato da je jedno od njih jednako 1 i barem jedno rješenje je dvostruko.

Rješenje.

Označimo $Q(x) = x^2 + 4x - 7$. Imamo $0 = P(Q(1)) = P(-2)$. Zato je $P(x) = a(x+2)(x-p)$, gdje je p realan broj. Dobivamo

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= a(x^2 + 4x - 7 + 2)(x^2 + 4x - 7 - p) \\ &= a(x-1)(x+5)(x^2 + 4x - 7 - p). \end{aligned}$$

To znači da su rješenja dane jednadžbe brojevi 1, -5 i rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 + 4x - 7 - p = 0. \qquad (1) \qquad \text{(8 bodova)}$$

Kako je barem jedno rješenje gornje jednadžbe dvostruko, tada je ili jedan od brojeva 1 i -5 rješenje jednadžbe (1) ili ona ima dvostruko rješenje. (3 boda)

Nadalje, iz jednadžbe (1) se vidi da je zbroj njezinih rješenja jednak -4, pa je broj 1 njezino rješenje ako i samo ako je -5 također njezino rješenje. (3 boda)

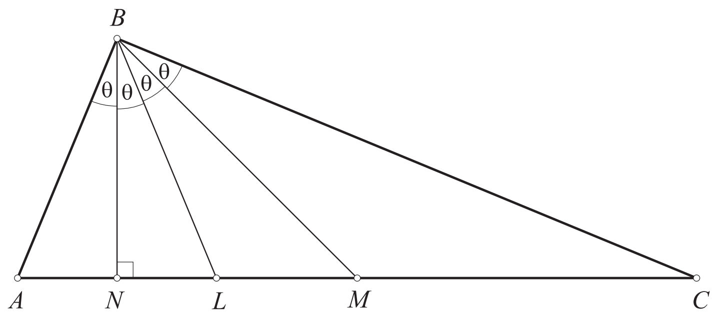
Postoje dvije mogućnosti:

a) Brojevi 1 i -5 su rješenja od (1) (tada je $p = -2$) i jednadžba $P(Q(x)) = a(x-1)^2(x+5)^2$ ima dva dvostruka rješenja. (3 boda)

b) Jednadžba (1) ima dvostruko rješenje. Kako je zbroj njezinih rješenja jednak -4, ona moraju biti jednaka $(-4) : 2 = -2$. (U tom slučaju je $p = -11$ i jednadžba postaje $P(Q(x)) = a(x-1)(x+5)(x+2)^2 = 0$.) (3 boda)

Zadatak 3. Visina, simetrala kuta i težišnica povučene iz jednog vrha trokuta dijele kut na četiri jednaka dijela. Odredi kutove trokuta.

Rješenje.
Stavljajući $\theta = \sphericalangle ABN$, imamo $\sphericalangle BAC = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ i $\sphericalangle BCA = \dfrac{\pi}{2} - 3\theta$.



Iz trokuta AMB dobivamo

$$|BM| = \frac{|AM| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin 3\theta} = \frac{|AM| \cos\theta}{\sin 3\theta},$$

(5 bodova)

a iz trokuta BMC

$$|BM| = \frac{|CM| \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{|CM| \cos 3\theta}{\sin\theta}.$$

(5 bodova)

Kako je $|AM| = |CM|$ slijedi

$$\frac{\cos\theta}{\sin 3\theta} = \frac{\cos 3\theta}{\sin\theta}.$$

Odavde dobivamo $\sin\theta\cos\theta = \sin 3\theta \cos 3\theta$, tj. $\sin 2\theta = \sin 6\theta$. (5 bodova)

Rješenje ove jednadžbe je $6\theta = 2k\pi + 2\theta$ i $6\theta = (2k-1)\pi - 2\theta$, tj. $\theta = \dfrac{k\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{(2k-1)\pi}{8}$, gdje je k cijeli broj. Jedino rješenje koje zadovoljava uvjete zadatka je $\theta = \dfrac{\pi}{8}$, odakle je

$$\sphericalangle BAC = \frac{3\pi}{8}, \quad \sphericalangle ABC = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle BCA = \frac{\pi}{8}.$$

(5 bodova)

Zadatak 4. Ako je

$$\cos\alpha + \cos\beta = a, \quad \sin\alpha + \sin\beta = b, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

odredi $\cos(\alpha+\beta)$.

Rješenje.
Kvadrirajmo dane jednakosti:

$$\begin{aligned} a^2 &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta, \\ b^2 &= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Zbrajanjem, odnosno oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2 + 2\cos(\alpha-\beta), \end{aligned}$$

(6 bodova)

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= \cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos(\alpha+\beta) \\ &= 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos(\alpha+\beta) \\ &= 2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1]. \end{aligned}$$

(8 bodova)

Budući je $\cos(\alpha-\beta)+1 = \dfrac{a^2+b^2}{2} \neq 0$, konačno dobivamo

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$ (6 bodova)

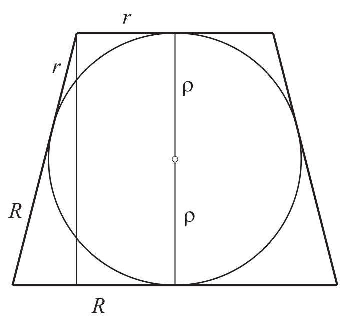
Zadatak 5. Kugla je upisana u krnji stožac čije su osnovke centralni presjeci drugih dviju kugala. Odredi oplošje stošca ako je zbroj oplošja svih triju kugala jednak S.

Rješenje.
Neka je polumjer krnjem stošcu upisane kugle jednak ρ, a polumjeri njegovih osnovki su R i r. Tada je zbroj oplošja svih triju kugala jednak

$$S = 4\pi(R^2 + \rho^2 + r^2). \qquad (1)$$ (4 boda)

Osni presjek krnjeg stošca je tangencijalni, jednakokračni trapez čija je srednjica (ujedno i izvodnica stošca) jednaka

$$s = \frac{2R + 2r}{2} = R + r. \qquad (2)$$ (4 boda)



Visinu krnjeg stošca 2ρ dobijemo iz pravokutnog trokuta čije su katete $R + r$ i $R - r$:

$$(2\rho)^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr.$$

Odavde dobivamo

$$\rho^2 = Rr. \qquad (3)$$ (4 boda)

Iz (1) i (3) imamo

$$S = 4\pi(R^2 + Rr + r^2).$$ (4 boda)

Oplošje krnjeg stošca je zbroj površina osnovki i plašta:

$$O = R^2\pi + r^2\pi + (R + r) \cdot \pi s.$$

Iz (2) dobivamo

$$O = 2\pi(R^2 + Rr + r^2) = \frac{S}{2}.$$ (4 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

7. ožujka 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Neka je $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$, gdje je n prirodan broj. Odredi najmanji prirodan broj k takav da je

$$P_k = a_2 a_3 \dots a_k$$

veći od 1000.

Rješenje.
Opći se član može napisati u obliku

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)(n+1)^2}{n^3},$$

(4 boda)

pa je

$$\begin{aligned} P_k &= a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k \\ &= \frac{1 \cdot 3^2}{2^3} \cdot \frac{2 \cdot 4^2}{3^3} \cdot \frac{3 \cdot 5^2}{4^3} \cdot \ldots \cdot \frac{(k-1)(k+1)^2}{k^3} \\ &= \frac{1}{2^2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{(k+1)^2}{k} \\ &= \frac{(k+1)^2}{4k}. \end{aligned}$$

(8 bodova)

Dalje je

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)^2}{4k} > 1000 \iff k^2 - 3998k + 1 > 0 \\ \iff k^2 - 3998k > -1 \iff k(k-3998) > -1, \end{aligned}$$

(4 boda)

Jer je $k > 0$, mora biti $k - 3998 \geq 0$.

Dakle, $k \geq 3998$, $k \in \mathbf{N}$.

Najmanji takav $k = 3998$. (4 boda)

Zadatak 2. Pronađi sve prirodne brojeve n, takve da neka tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a+b)^n$ čine aritmetički niz.

Rješenje.

Tri uzastopna koeficijenta razvoja $(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ su $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$.

(2 boda)

Oni čine aritmetički niz ako je:

$$2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}. \tag{1}$$

(2 boda)

tj.

$$\begin{aligned} &2\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \\ &\qquad = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)} + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+1)}. \end{aligned}$$

Nakon sređivanja dobivamo kvadratnu jednadžbu po n:

$$\begin{aligned} 2\cdot\frac{n-k+1}{k} &= 1 + \frac{(n-k+1)(n-k)}{k(k+1)}, \\ n^2-(4k+1)n+4k^2-2 &= 0. \end{aligned}$$

(6 boda)

Rješenja ove jednadžbe su:

$$n_{1,2} = \frac{4k+1\pm\sqrt{8k+9}}{2}. \tag{2}$$

Da bi rješenja n_1 i n_2 bila prirodni brojevi, nužno je da izraz pod korijenom bude kvadrat neparnog prirodnog broja. (2 boda)

Stavimo li stoga $8k+9=(2m+1)^2$, dobivamo da je $2k=m^2+m-2$, a zatim iz (2) za rješenja n_1 i n_2 imamo:

$$\begin{aligned} n_1 &= m^2+2m-1=(m+1)^2-2, \\ n_2 &= m^2-2. \end{aligned}$$

Na temelju tih prikaza zaključujemo da su svi traženi prirodni brojevi n, koji zbog (1) moraju još zadovoljavati uvjet $n \geq k+1$, oblika

$$n = m^2-2, \quad m=3,4,5,\ldots.$$

(8 bodova)

(Jasno je da zbog simetrije binomnih koeficijenata za svaki takav n postoje u odgovarajućem razvoju dva mjesta gdje se ostvaruje polazni zahtjev o aritmetičkom nizu.)

Zadatak 3. Dokaži da za svaki prirodni broj n veći od 2 vrijedi

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < 1.$$

Rješenje.

Lijeva nejednakost se lako dobije. Svaki pribrojnik u sumi veći je od $\dfrac{1}{2n}$. Tih pribrojnika ima $n+1$. Zato vrijedi

$$S = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

(5 bodova)

Za dokaz desne strane koristit ćemo sličnu ocjenu. Svi su pribrojnici, počevši od trećeg, manji od $\dfrac{1}{n+2}$ pa je

$$\begin{aligned} S &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) + n(n+2) + (n-1)n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+3n+2+n^2+2n+n^3-n}{n^3+3n^2+2n} = \frac{n^3+2n^2+4n+2}{n^3+3n^2+2n}. \end{aligned}$$

Ovaj je razlomak manji od 1, jer je $2n^2+4n+2 < 3n^2+2n$ ekvivalentno s $2n+2 < n^2$, što je istina za $n > 2$. (15 bodova)

Drugo rješenje.

Desna nejednakost može se dokazati indukcijom. Označimo

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Za $n = 3$ vrijedi $S_3 = \frac{19}{20} < 1$. Pretpostavimo da vrijedi $S_n < 1$. Razlika dva uzastopna člana niza (S_n) je

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n}\right) < 0.$$

Zato je

$$S_{n+1} < S_n < 1.$$

Time je korak indukcije pokazan. (15 bodova)

Zadatak 4. Neka je p realan broj, $0 < p < 1$, a n prirodan broj. Dokaži da vrijedi nejednakost

$$1 + 2p + 3p^2 + \cdots + np^{n-1} < \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Rješenje.
Označimo lijevu stranu nejednakosti sa S:

$$\begin{aligned} S = 1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{n-1} \\ +p + p^2 + p^3 + \cdots + p^{n-1} \\ +p^2 + p^3 + \cdots + p^{n-1} \\ \vdots \quad\quad \\ +p^{n-2} + p^{n-1} \\ +p^{n-1}. \end{aligned}$$

Tada je

$$S = \frac{1-p^n}{1-p} + \frac{p-p^n}{1-p} + \frac{p^2-p^n}{1-p} + \cdots + \frac{p^{n-2}-p^n}{1-p} + \frac{p^{n-1}-p^n}{1-p},$$

(10 bodova)

pa je

$$\begin{aligned} S &< \frac{1}{1-p} + \frac{p}{1-p} + \frac{p^2}{1-p} + \cdots + \frac{p^{n-2}}{1-p} + \frac{p^{n-1}}{1-p} \\ &= \frac{1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2} + p^{n-1}}{1-p} = \frac{\frac{1-p^2}{1-p}}{1-p} = \frac{1-p^2}{(1-p)^2} \\ &< \frac{1}{(1-p)^2}. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2p + 3p^2 + \cdots + np^{n-1} \\ pS &= p + 2p^2 + 3p^3 + \cdots + np^n \\ S - pS &= 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} - np^n \end{aligned}$$

(5 bodova)

$$\begin{aligned} S(1-p) &= 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} - np^n \\ S(1-p) &= \frac{1-p^n}{1-p} - np^n \\ S &= \frac{1-p^n}{(1-p)^2} - n\frac{p^n}{1-p} \end{aligned}$$

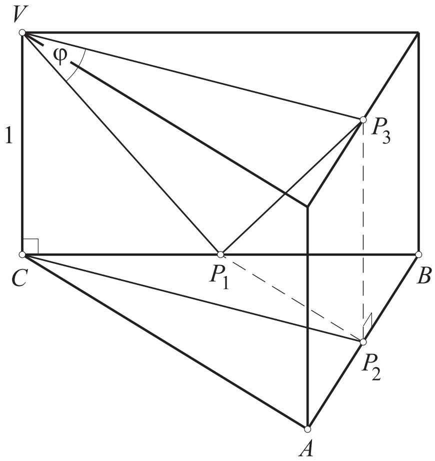
(10 bodova)

Vrijedi $0 < p < 1$, pa je

$$S < \frac{1}{(1-p)^2}$$ (5 bodova)

Zadatak 5. Osnovka ABC piramide $ABCV$ je jednakostraničan trokut stranice duljine $2\sqrt{2}$. Brid $\overline{CV}$ ima duljinu 1 i okomit je na ravninu osnovke. Nađi kut koji zatvaraju pravci od kojih jedan prolazi vrhom V i polovištem stranice $\overline{BC}$, a drugi vrhom C i polovištem stranice $\overline{AB}$.

Prvo rješenje.
Nacrtajmo prizmu kojoj je gornja baza sukladna osnovki piramide, kao na slici. Povucimo dužinu $\overline{VP_3}$ paralelnu s $\overline{CP_2}$. (5 bodova)



Tražimo kut φ u trokutu VP_1P_3. Izračunajmo duljine stranica u tom trokutu:

$$|VP_1| = \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3},$$
$$|VP_3| = |CP_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6},$$
$$|P_1P_3| = \sqrt{|P_1P_2|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{3}.$$

(10 bodova)

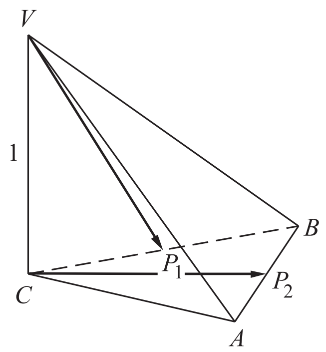
Prema poučku o kosinusu, vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{3 + 6 - 3}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

pa je $\varphi = 45°$. (5 bodova)

Drugo rješenje.
Za kosinus traženog kuta vrijedi

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{VP_1} \cdot \overrightarrow{CP_2}}{|\overrightarrow{VP_1}| \cdot |\overrightarrow{CP_2}|}$$



Duljine vektora u nazivniku su

$$|\overrightarrow{VP_1}| = |VP_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3},$$
$$|\overrightarrow{CP_2}| = |CP_2| = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}.$$

Prikažimo te vektore ovako:

$$\overrightarrow{VP_1} = \overrightarrow{VC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB},$$
$$\overrightarrow{CP_2} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}).$$

(5 bodova)

Sada je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{VP_1} \cdot \overrightarrow{VP_2} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{VC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{VC} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}|\overrightarrow{CB}|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + 0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot 8\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + 2.\end{aligned}$$

(10 bodova)

Sad računamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} &= |\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos\sphericalangle ACB \\ &= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.\end{aligned}$$

Zato je

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa traženi kut φ iznosi 45°. (5 bodova)