ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

7. ožujka 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Dokaži jednakost

$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

Prvo rješenje.
Izmnožit ćemo i usporediti lijevu i desnu stranu.

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\ = \; & [(a+b)+c]^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\ = \; & (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\ = \; & 3(a^2b + ab^2 + a^2c + 2abc + b^2c + ac^2 + bc^2). \end{aligned}$$

(10 bodova)

$$\begin{aligned} & 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ = \; & 3(a+b)(ab+ac+bc+c^2) \\ = \; & 3(a^2b + ab^2 + a^2c + 2abc + b^2c + ac^2 + bc^2). \end{aligned}$$

(10 bodova)

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\ = \; & [(a+b+c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3) \\ = \; & (b+c)[(a+b+c)^2 + (a+b+c)a + a^2] - (b+c)(b^2 - bc + c^2) \end{aligned}$$

(10 bodova)

$$= 3(b+c)(a^2 + ab + ac + bc) \;=\; 3(b+c)(a+b)(a+c).$$

(10 bodova)

Zadatak 2. Riješi jednadžbu

$$\frac{6a+1}{a}x + \frac{6a}{a+1} + \frac{a^2}{(a+1)^3} = \frac{2a+1}{a^3+2a^2+a}x$$

u ovisnosti o realnom parametru a.

Rješenje.
Da bi sve operacije bile definirane mora biti $a \neq 0$ i $a \neq -1$. (2 boda)

Množenjem jednadžbe s $a(a+1)^3$ i sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
(6a+1)(a+1)^3x - (2a+1)(a+1)x + 6a^2(a+1)^2 + a^3 &= 0 \\
x(a+1)[(6a+1)(a+1)^2 - (2a+1)] + a^2[6(a+1)^2 + a] &= 0 \\
x(a+1)(6a^3 + 13a^2 + 6a) + a^2(6a^2 + 13a + 6) &= 0 \\
(2a+3)(3a+2)[xa(a+1) + a^2] &= 0.
\end{aligned}$$

(10 bodova)

Za $a \in \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$ jednadžba je neodređena, tj. zadovoljena je za svaki $x \in \mathbb{R}$. (4 boda)

Za $a \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, 0, -1\right\}$ jednadžba ima rješenje $x = -\frac{a}{a+1}$. (4 boda)

Napomena. Učenik koji bez diskusije dobije rješenje $x = -\frac{a}{a+1}$, dobiva najviše 12 bodova.

Zadatak 3. Odredi znamenke a i b tako da broj $\overline{2a0b82}$ bude djeljiv s 13.

Rješenje.
Prikažimo promatrani broj u obliku

$$\begin{aligned}
\overline{2a0b82} &= 200\,082 + 10\,000a + 100b \\
&= (15\,390 \cdot 13 + 12) + (769 \cdot 13 + 3)a + (7 \cdot 13 + 9)b \\
&= 13k + 12 + 3a + 9b, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

(6 bodova)

Promatrani broj bit će djeljiv s 13 ako i samo ako je $12 + 3a + 9b$ djeljivo s 13. (2 boda)

Kako su a i b znamenke, trebamo ispitati deset slučajeva, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Dobivamo:

b	a	broj
0	9	290 082
1	6	260 182
2	3	230 282
3	–	–
4	–	–
5	7	270 582
6	4	240 682
7	1	210 782
8	–	–
9	8	280 982

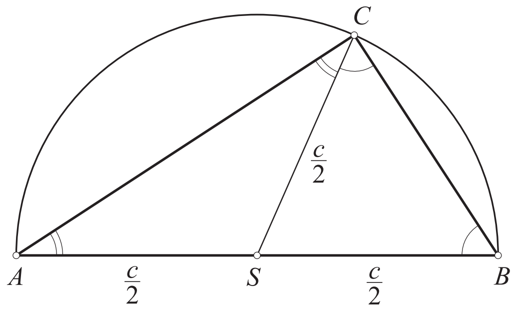
(12 bodova)

Imamo sedam brojeva koji zadovoljavaju dani uvjet. To su: 290 082, 260 182, 230 282, 270 582, 240 682, 210 782, 280 982,

Napomena. Prema poznatom pravilu za djeljivost broja s 13, broj $\overline{2a0b82}$ je djeljiv s 13 ako i samo ako je broj $\overline{b82} - \overline{2a0}$ djeljiv s 13. Odatle dobivamo $(100b + 82) - (200 + 10a) = 100b - 10a - 118 = 13(7b - a - 9) + 9b + 3a - 1 = 13(8b - a - 9) + 3a - 4b - 1$, pa kao i u prvom rješenju tražimo a, b za koje je $3a + 9b - 1$ djeljivo s 13, ili jednostavnije $3a - 4b - 1$ djeljivo s 13.

Zadatak 4. Dan je trokut ABC. Ako je duljina težišnice iz vrha C jednaka polovini duljine stranice $\overline{AB}$, dokaži da je trokut ABC pravokutan.

Rješenje.
Neka je S polovište stranice $\overline{AB}$. Kako je $\overline{CS}$ težišnica, prema uvjetu zadatka vrijedi $|SA| = |SB| = |SC|$, što znači da je S središte trokutu ABC opisane kružnice. (10 bodova)

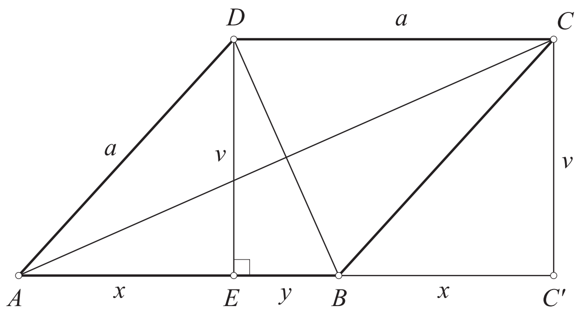


Prema Talesovom poučku kut u vrhu C je pravi i trokut ABC je pravokutan. (10 bodova)

Napomena. Drugi dio se može pokazati i promatranjem jednakokračnih trokuta ASC i CSB.

Zadatak 5. Kut $\sphericalangle BAD$ romba $ABCD$ je šiljast. Nožište visine iz vrha D dijeli stranicu $\overline{AB}$ na dvije dužine duljina x i y. Izrazi duljine dijagonala romba $ABCD$ pomoću x i y.

Rješenje.
Neka je E nožište visine iz vrha D. Duljina stranice romba je $a = x + y$.



Trokut AED je pravokutan, pa primjenom Pitagorinog teorema dobivamo

$$v = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(x+y)^2 - x^2} = \sqrt{y(2x+y)}. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Tada je duljina dijagonale $\overline{BD}$ jednaka

$$|BD| = \sqrt{v^2 + y^2} = \sqrt{2y(x+y)}. \qquad \text{(7 bodova)}$$

Dijagonala $\overline{AC}$ je hipotenuza pravokutnog trokuta $AC'C$, pa je

$$|AC| = \sqrt{(2x+y)^2 + v^2} = \sqrt{4x^2 + 6xy + 2y^2}. \qquad \text{(7 bodova)}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

7. ožujka 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Skiciraj skup svih kompleksnih brojeva z koji zadovoljavaju uvjet

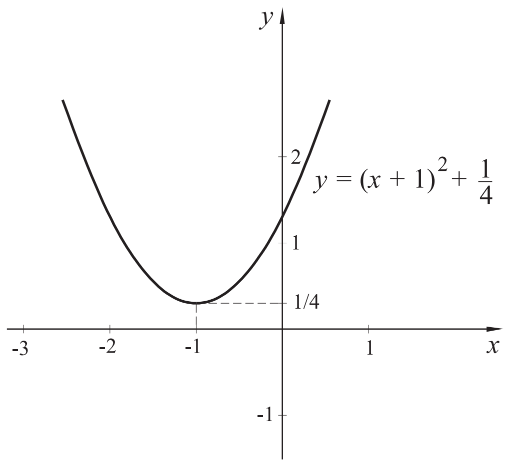
$$\left|z + 1 - \frac{i}{2}\right| = \operatorname{Im} z,$$

i među njima odredi onaj s najmanjim imaginarnim dijelom.

Rješenje.
Stavljajući $z = x + yi$ u dani uvjet dobivamo

$$\begin{aligned} \left|(x+1) + \left(y - \frac{1}{2}\right) i\right| &= y \\ (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= y^2 \\ y &= (x+1)^2 + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(8 bodova)



(slika 6 bodova)

Traženi skup točaka je parabola $y = (x+1)^2 + \dfrac{1}{4}$.

Najmanji imaginarni dio ima kompleksni broj u tjemenu parabole, tj. $z = -1 + \dfrac{i}{4}$. (6 bodova)

Zadatak 2. Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 - xy + y^2 = 1.$$

Rješenje.
Iz

$$x^2 + y^2 = 1 + xy \quad \Rightarrow \quad 1 + xy \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xy \geq -1, \qquad \text{(4 boda)}$$

$$(x-y)^2 = 1 - xy \quad \Rightarrow \quad 1 - xy \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xy \leq 1. \qquad \text{(4 boda)}$$

Kako je xy cijeli broj, mora biti $xy \in \{-1, 0, 1\}$. (2 boda)

Moramo promatrati sljedeća tri slučaja:

1° $xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ ili $y = 0$;

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1$, imamo $(0,1)$, $(0,-1)$;

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1$, imamo $(1,0)$, $(-1,0)$.

Provjerom vidimo da su to zaista rješenja. (4 boda)

2° $xy = 1$ je moguće samo za $(1,1)$ i $(-1,-1)$.

Provjerom vidimo da su i to rješenja dane jednadžbe. (3 boda)

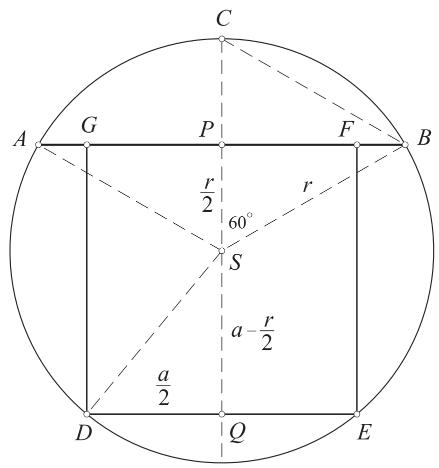
3° Uvrštavanjem $xy = -1$ u početnu jednadžbu vidimo da u tom slučaju nema rješenja.

(3 boda)

Napomena. Učenik koji nađe neka ili sva rješenja, ali nema analize iz koje se vidi da nema drugih rješenja, dobiva najviše 5 bodova.

Zadatak 3. Tetiva $\overline{AB}$ dijeli krug polumjera r na dva dijela čije se pripadne duljine kružnih lukova odnose kao $1:2$. U veći od ta dva dijela upisan je kvadrat čija jedna stranica leži na toj tetivi. Odredi duljinu stranice tog kvadrata.

Rješenje.
Kako su duljine kružnih lukova u omjeru $1:2$ i njihovi središnji kutovi moraju biti u istom omjeru. Zato je $\sphericalangle ASB = 120^\circ$. (2 boda)



(slika 3 boda)

Trokut SBC je jednakostraničan pa je $|SP| = \frac{r}{2}$ i $|SQ| = a - \frac{r}{2}$. (3 boda)

Iz trokuta SDQ imamo

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{r}{2}\right)^2 \quad \text{tj.} \quad 5a^2 - 4ra - 3r^2 = 0. \qquad \text{(7 bodova)}$$

Kako je duljina stranice kvadrata pozitivan broj, zadovoljava samo rješenje

$$a = \frac{2 + \sqrt{19}}{5} r. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Napomena. Zadatak se može riješiti i analitički.

Zadatak 4. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 = 0.$$

Prvo rješenje.

Jednadžbu ćemo najprije preurediti u zgodniji oblik. Supstitucijom $x + 4 = y$ dobivamo redom

$$\begin{aligned} (y-3)(y-1)(y+1)(y+3) + 15 &= 0 \\ (y^2 - 9)(y^2 - 1) + 15 &= 0 \\ y^4 - 10y^2 + 24 &= 0. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Odavde slijedi

$$y^2 = 4 \quad \text{ili} \quad y^2 = 6$$

$$y_{1,2} = \pm 2 \quad \text{ili} \quad y_{3,4} = \pm\sqrt{6},$$

odnosno $x_1 = -2,\ x_2 = -6,\ x_3 = -4 + \sqrt{6},\ x_4 = -4 - \sqrt{6}$. (10 bodova)

Drugo rješenje.

Jednadžbu ćemo najprije preurediti:

$$\begin{aligned} 0 &= [(x+1)(x+7)][(x+3)(x+5)] + 15 \\ &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15 \end{aligned}$$

(4 boda)

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 7 + 8) + 15 \\ &\quad [u = x^2 + 8x + 7] \\ &= u(u+8) + 15 \end{aligned}$$

(6 bodova)

$$
\begin{aligned}
&= u^2 + 8u + 15 \;=\; (u+3)(u+5) \\
&= (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) \\
&= (x + 4 + \sqrt{6})(x + 4 - \sqrt{6})(x+2)(x+6).
\end{aligned}
$$

(8 bodova)

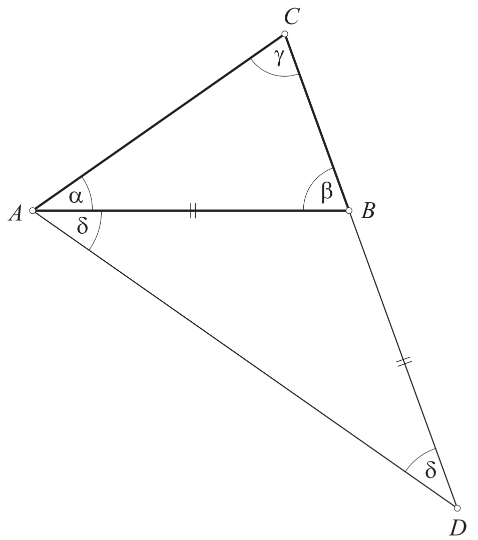
Rješenja dane jednadžbe su: $x_1 = -4 - \sqrt{6}$, $x_2 = -4 + \sqrt{6}$, $x_3 = -2$, $x_4 = -6$. (2 boda)

Zadatak 5. Ako u trokutu ABC vrijedi

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB| + |BC|}{|AC|}$$

dokaži da je $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$.

Rješenje.
Produžimo stranicu $\overline{CB}$ preko vrha B do točke D tako da je $|BD| = |AB|$.



Trokut ADB je jednakokračan pa je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BAD$. (5 bodova)

Iz danog uvjeta

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB| + |BC|}{|AC|} \quad \text{tj.} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|AC|},$$

slijedi da su trokuti ABC i DAC slični. (5 bodova)

Odavde dobivamo $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle BAD$ i $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADB = \sphericalangle CAB$, odnosno $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$. (10 bodova)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

7. ožujka 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Odredi sve vrijednosti realnog parametra p za koje jednadžba

$$\log_3(9^x + 9p^2) = x$$

ima dva različita rješenja.

Rješenje.
Dana jednadžba prelazi u ekvivalentan oblik

$$9^x + 9p^2 = 3^x. \qquad \text{(4 boda)}$$

Supstitucijom $y = 3^x > 0$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $y^2 - y + 9p^2 = 0$, čija rješenja su

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 36p^2}}{2}, \quad y_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 36p^2}}{2}. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Da bi rješenja bila realna i različita, mora njezina diskriminanta $D = 1 - 36p^2$ biti pozitivna, tj.

$$-\frac{1}{6} < p < \frac{1}{6}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Očito je $y_2 > 0$. Da bi bilo $y_1 > 0$ treba biti $p \neq 0$. (4 boda)

Dakle, za svako $p \in \left\langle -\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right\rangle \setminus \{0\}$ polazna jednadžba ima dva različita rješenja. (2 boda)

Zadatak 2. Nađi sva rješenja nejednadžbe

$$\frac{2\sin x - 1}{\cos 2x + \sin^2 x} < 0$$

na intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje.
Nejednadžbu transformiramo u ekvivalentan oblik:

$$\begin{aligned} \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} &< 0 \\ \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x} &< 0. \end{aligned}$$

(4 boda)

Kako mora biti $\cos^2 x \neq 0$, imamo $x \neq \frac{\pi}{2}$ i $x \neq \frac{3\pi}{2}$.

Za svako $x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$ je $\cos^2 x > 0$. (4 boda)

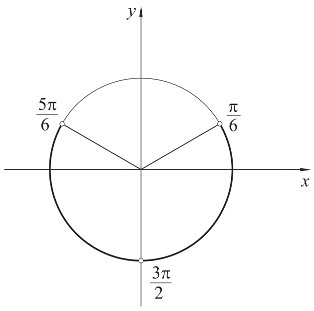
Tada dobivamo

$$2 \sin x - 1 < 0 \quad \text{tj.} \quad \sin x < \frac{1}{2}. \qquad \text{(4 boda)}$$

Rješenje ove nejednadžbe je

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}, 2\pi\right], \qquad \text{(4 boda)}$$

pa je konačno rješenje $\left[0, \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. (4 boda)



Zadatak 3. Odredi sva cjelobrojna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= -90. \end{aligned}$$

Rješenje.
Iz prve jednadžbe imamo $x + y = -z$, pa kubiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 3xy(x + y) &= -z^3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3xyz \\ -90 &= 3xyz \\ xyz &= -30. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Kako su rješenja cijeli brojevi, moraju biti djelitelji od 30, tj.

$$x, y, z \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30\}. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Budući je $x + y + z = 0$, jedine trojke koje dolaze u obzir su $(\pm 1, \pm 1, \mp 2)$, $(\pm 1, \pm 2, \mp 3)$, $(\pm 1, \pm 5, \mp 6)$, $(\pm 2, \pm 3, \mp 5)$, $(\pm 5, \pm 5, \mp 10)$, $(\pm 5, \pm 10, \mp 15)$, $(\pm 15, \pm 15, \mp 30)$, i sve njihove permutacije. Kako mora biti $xyz = -30$, jedina rješenja su:

$$\begin{aligned} &(2, 3, -5),\ (2, -5, 3),\ (3, 2, -5),\ (3, -5, 2),\ (-5, 2, 3),\ (-5, 3, 2), \\ &(1, 5, -6),\ (1, -6, 5),\ (5, 1, -6),\ (5, -6, 1),\ (-6, 1, 5),\ (-6, 5, 1). \end{aligned}$$

(5 bodova)

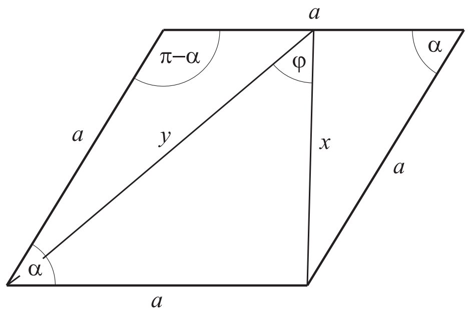
Zadatak 4. Veličina šiljastog kuta romba je α. Pod kojim kutom se vidi stranica romba iz polovišta nasuprotne stranice? Za koji romb je taj kut najveći?

Rješenje.
Uz oznake sa slike imamo

$$\cos\varphi = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2xy}, \qquad (1) \qquad \text{(2 boda)}$$

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a}{2}\cos\alpha, \qquad (2) \qquad \text{(4 boda)}$$

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a}{2}\cos(\pi - \alpha). \qquad (3) \qquad \text{(4 boda)}$$



Iz (2) i (3) dobivamo $x = a\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\alpha}$ i $y = a\sqrt{\frac{5}{4} + \cos\alpha}$.
Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$\cos\varphi = \frac{\frac{3}{2}a^2}{2 \cdot a^2\sqrt{\left(\frac{5}{4} - \cos\alpha\right) \cdot \left(\frac{5}{4} + \cos\alpha\right)}} = \frac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}. \qquad \text{(6 bodova)}$$

Tada je

$$\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}.$$

Kut φ će biti najveći ako je $\frac{3}{\sqrt{25 - 16\cos^2\alpha}}$ najmanji, tj. ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Promatrani romb je kvadrat. (4 boda)

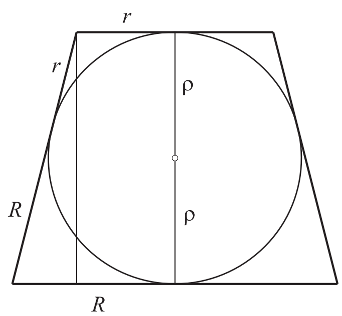
Zadatak 5. Kugla je upisana u krnji stožac čije su osnovke centralni presjeci drugih dviju kugala. Odredi oplošje stošca ako je zbroj oplošja svih triju kugala jednak S.

Rješenje.
Neka je polumjer krnjem stošcu upisane kugle jednak ρ, a polumjeri njegovih osnovki su R i r. Tada je zbroj oplošja svih triju kugala jednak

$$S = 4\pi(R^2 + \rho^2 + r^2). \qquad (1)$$ (4 boda)

Osni presjek krnjeg stošca je tangencijalni, jednakokračni trapez čija je srednjica (ujedno i izvodnica stošca) jednaka

$$s = \frac{2R + 2r}{2} = R + r. \qquad (2)$$ (4 boda)



Visinu krnjeg stošca 2ρ dobijemo iz pravokutnog trokuta čije su katete $R + r$ i $R - r$:

$$(2\rho)^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr.$$

Odavde dobivamo

$$\rho^2 = Rr. \qquad (3)$$ (4 boda)

Iz (1) i (3) imamo

$$S = 4\pi(R^2 + Rr + r^2).$$ (4 boda)

Oplošje krnjeg stošca je zbroj površina osnovki i plašta:

$$O = R^2\pi + r^2\pi + (R + r) \cdot \pi s.$$

Iz (2) dobivamo

$$O = 2\pi(R^2 + Rr + r^2) = \frac{S}{2}.$$ (4 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

7. ožujka 2008.

Ukoliko učenik ima rješenje (ili dio rješenja) različito od ovdje navedenog, bodovanje treba uskladiti s ovdje ponuđenim. Ispravno riješen zadatak boduje se s 20 bodova.

Zadatak 1. Neka je $a_n = 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n^3}$, gdje je n prirodan broj. Odredi najmanji prirodan broj k takav da je

$$P_k = a_2 a_3 \dots a_k$$

veći od 1000.

Rješenje.
Opći se član može napisati u obliku

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)(n+1)^2}{n^3},$$

(4 boda)

pa je

$$\begin{aligned} P_k &= a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k \\ &= \frac{1 \cdot 3^2}{2^3} \cdot \frac{2 \cdot 4^2}{3^3} \cdot \frac{3 \cdot 5^2}{4^3} \cdot \ldots \cdot \frac{(k-1)(k+1)^2}{k^3} \\ &= \frac{1}{2^2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \frac{(k+1)^2}{k} \\ &= \frac{(k+1)^2}{4k}. \end{aligned}$$

(8 bodova)

Dalje je

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)^2}{4k} > 1000 &\iff k^2 - 3998k + 1 > 0 \\ \iff k^2 - 3998k > -1 &\iff k(k-3998) > -1, \end{aligned}$$

(4 boda)

Jer je $k > 0$, mora biti $k - 3998 \geq 0$.

Dakle, $k \geq 3998$, $k \in \mathbf{N}$.

Najmanji takav $k = 3998$. (4 boda)

Zadatak 2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$(z-1)^4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)^5 - i$$

i za koje je $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Rješenje.

Trigonometrijski prikaz broja $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i$ je

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}.$$

(2 boda)

Zato je, prema de Moivreovoj formuli,

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right)^5 - i = \left(\cos\frac{55\pi}{6} + i\sin\frac{55\pi}{6}\right) - i.$$

$$= \cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6} - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i - i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i$$

(4 boda)

Trigonometrijski prikaz ovog broja je

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = \sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

(2 boda)

Vrijednosti četvrtih korijena ovog broja su:

$$z'_k = \sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{2\pi+3k\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi+3k\pi}{6}\right), \qquad k = 0,1,2,3$$

(2 boda)

Četiri kompleksna broja koja zadovoljavaju početnu jednadžbu su

$$z_0 = z'_0 + 1 = \sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[8]{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) + 1,$$

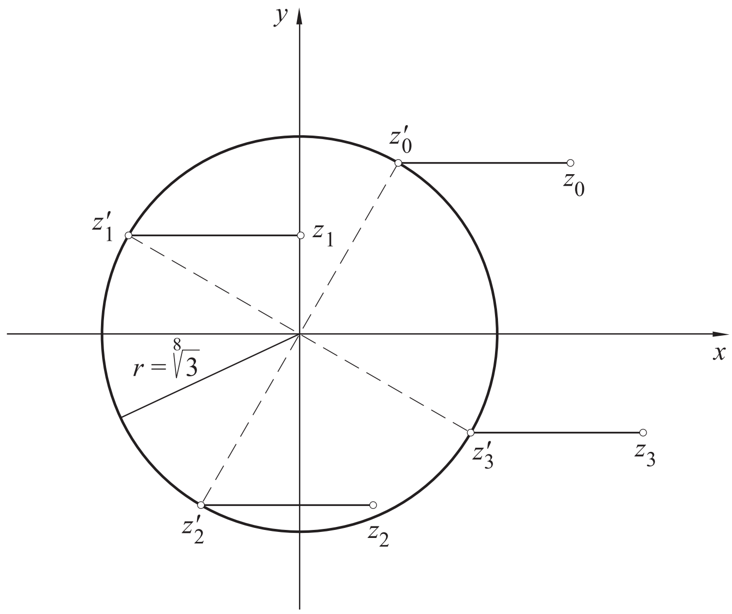
$$z_1 = z'_1 + 1 = \sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[8]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) + 1,$$

$$z_2 = z'_2 + 1 = \sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[8]{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) + 1,$$

$$z_3 = z'_3 + 1 = \sqrt[8]{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt[8]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right) + 1,$$

(4 boda)

Ovi su brojevi nacrtani na slici. Očito je da vrijedi $\operatorname{Im} z_2 < 0$, $\operatorname{Im} z_3 < 0$, pa ova dva broja ne zadovoljavaju. Također, $\operatorname{Re} z_0 > 0$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, pa je z_0 rješenje. (2 boda)



Za broj z_1 je $\operatorname{Im} z_1 > 0$, a realni dio ovog broja iznosi

$$1 - \sqrt[8]{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Da bismo odredili predznak ovog broja, dovoljno je potencirati drugi pribrojmik:

$$\left(\sqrt[8]{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^8 = \frac{3 \cdot 3^4}{2^8} = \frac{243}{256} < 1.$$

Zato je

$$\operatorname{Re} z_1 = 1 - \sqrt[8]{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,$$

pa je i broj z_1 rješenje. (4 boda)

Zadatak 3. Odredi polinom P stupnja 4 takav da je $P(0)=0$ i $P(x)-P(x-1)=x^3$, za svaki realni broj x. Koristeći dobiveni rezultat nađi formulu za zbroj

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3.$$

Prvo rješenje.
Prema uvjetu zadatka, 0 je nultočka polinoma P. Nadalje, za $x=0$ vrijedi:

$$P(0)+P(-1)=0,$$

pa je $x=-1$ također nultočka. Zato je polinom djeljiv s $x(x+1)$. Možemo ga prikazati u obliku

$$P(x)=x(x+1)(ax^2+bx+c).$$ (5 bodova)

Koeficijente možemo odrediti iz temeljnog identiteta:

$$\begin{gathered}P(x)-P(x-1)=x^3,\\ x(x+1)(ax^2+bx+c)-(x-1)x(a(x-1)^2+b(x-1)+c)=x^3,\\ ax^2(x+1)+bx(x+1)+c(x+1)-a(x-1)^3-b(x-1)^2-c(x-1)=x^2.\end{gathered}$$

(5 bodova)

Sređujući po potencijama od x, dobivamo

$$\begin{gathered}x^2(4a-1)+x(3b-3a)+2c+a-b=0,\\ 4a-1=0 \implies a=\frac{1}{4},\\ 3b-3a=0 \implies b=a=\frac{1}{4},\\ 2c+a-b=0 \implies c=0.\end{gathered}$$

Prema tome, vrijedi

$$P(x)=\frac{1}{4}x^2(x+1)^2.$$ (5 bodova)

Iz niza rekurzija

$$\begin{aligned}P(1)-P(0) &= 1^3,\\ P(2)-P(1) &= 2^3,\\ &\vdots\\ P(n)-P(n-1) &= n^3\end{aligned}$$

zbrajanjem dobivamo, uvažavajući $P(0)=0$,

$$P(n)=1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$ (5 bodova)

Drugo rješenje.
Do istog se rješenja može doći i bez početne analize, tražeći polinom u obliku

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Koeficijente tražimo iz identiteta:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1) + e + x^3.$$

(4 boda)

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije, dobivamo:

$$\begin{aligned} a &= a \\ b &= -4a + b + 1, \\ c &= 6a - 3b + c, \\ d &= -4a + 3b - 2c + d, \\ e &= a - b + c - d + e. \end{aligned}$$

(4 boda)

Iz druge jednakosti slijedi $a = \dfrac{1}{4}$, iz treće $b = \dfrac{1}{2}$, iz sljedeće $c = \dfrac{1}{4}$, a iz posljednje $d = 0$.

(5 bodova)

Koeficijent e jednak je nuli, jer vrijedi $P(0) = e = 0$. Dakle

$$P(x) = \frac{1}{4}x^2(x+1)^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Računanje sume odvija se kao u prvom rješenju. (5 bodova)

Zadatak 4. Odredi izraz za opći član u obliku potencije i izračunaj graničnu vrijednost niza:

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{3\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots \quad \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}, \ldots$$

(opći član piše se pomoću n korijena i n trojki).

Rješenje.
Vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{3}, \\ a_2 &= \sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3^3}, \\ a_3 &= \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{3^7}. \end{aligned}$$

Dokažimo indukcijom da je $a_n = \sqrt[2^n]{3^{2^n-1}}$. (4 boda)

Korak indukcije:

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} = \sqrt{3 \cdot \sqrt[2^n]{3^{2^n-1}}} = \sqrt{\sqrt[2^n]{3^{2^n} \cdot 3^{2^n-1}}} = \sqrt[2^{n+1}]{3^{2^{n+1}-1}} \qquad \text{(8 bodova)}$$

Sada je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{2^n-1}{2^n}} = 3^{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})} = 3. \qquad \text{(8 bodova)}$$

Zadatak 5. Nađi točku hiperbole $3x^2 - 4y^2 = 12$ najbližu točki $A(0, 7)$.

Prvo rješenje.
Neka je tražena točka $T(x, y)$. Udaljenost točaka A i T je

$$\begin{aligned}|AT| &= \sqrt{(x_T - x_A)^2 + (y_T - y_A)^2}\\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-7)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49},\end{aligned}$$

(5 bodova)

Budući da točka pripada hiperboli $x^2 = 4 + \frac{4}{3}y^2$, izraz pod korijenom poprima vrijedost

$$\begin{aligned}f(y) &= \frac{12 + 4y^2}{3} + y^2 - 14y + 49\\ &= \frac{7}{3}y^2 - 14y + 53.\end{aligned}$$

(7 bodova)

Sad treba naći minimum ove funkcije. Riječ je kvadratnoj funkciji, pa se njezin minimum poprima u apscisi tjemena:

$$y_{\min} = -\frac{-14}{2 \cdot \frac{7}{3}} = 3,$$ (5 bodova)

Traženi x jednak je ± 4. Postoje dvije točke $(4, 3)$ i $(-4, 3)$. (3 bodova)

Drugo rješenje. Tangenta u točki $T(x_1, y_1)$ hiperbole ima jednadžbu

$$b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = a^2 b^2.$$

Koeficijent smjera tangente je $k = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$, a koeficijent smjera normale je $n = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$. (5 bodova)

Normala hiperbole koja prolazi točkom $A = (x_0, y_0) = (0, 7)$ siječe hiperbolu u točki (x_1, y_1). Njezina je jednadžba

$$y - y_0 = -\frac{4y_1}{3x_1}(x - x_0)$$ (7 bodova)

tj.

$$y - 7 = -\frac{4y_1}{3x_1}x.$$

Budući da taj pravac prolazi i točkom T mora vrijediti $y_1 = 7 - \frac{4y_1}{3x_1}x_1$ iz čega lako dobijemo $y_1 = 3$. Iz jednadžbe elipse slijedi $x = \pm 4$. (8 bodova)