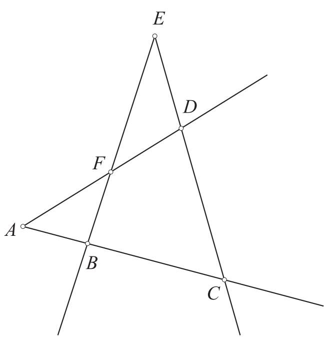
MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – osnovna škola

29. siječnja 2009.

1. Izračunaj $287 \cdot 70 + 2009 - 10 \cdot (2205 - 2025 : 15 - 61)$.
2. Četiri ribara, Frane, Ante, Mate i Jure ulovili su zajedno 382 kg ribe. Kada je Frane prodao 8 kg ribe, Ante 25 kg ribe, Mate 36 kg ribe i Jure 45 kg ribe, ostala im je jednaka količina ribe. Koliko je kilograma ribe ulovio svaki ribar?
3. Koliko dužina ima na slici? Ispiši ih!



4. Josip je razbio svoju kasicu–prasicu i u njoj su bile 62 kovanice. Od toga su 32 kovanice imale vrijednost od 50 lipa, a ostale su bile u vrijednosti od 2 kune i 5 kuna. Ukupna vrijednost svih kovanica bila je 100 kuna. Koliko je bilo kovanica od 2 kune, a koliko od 5 kuna?
5. Ispiši sve četveroznamenkaste brojeve kojima je umnožak znamenki veći od 12 i manji od 16. Koliko ima takvih brojeva?

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – rješenja

29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Imamo redom

$$\begin{aligned} 287\cdot 70+2009-10\cdot(2205-2025:15-61) &= 287\cdot 70+2009-10\cdot(2205-135-61) && \text{3BODA}\\ &= 20090+2009-10\cdot(2070-61) && \text{3BODA}\\ &= 2009\cdot 10+2009-10\cdot 2009 && \text{3BODA}\\ &= 2009. && \text{1BOD}\end{aligned}$$

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Nakon što je Frane prodao 8 kg, Ante 25 kg, Mate 36 kg i Jure 45 kg ribe,
ostalo je $382-(8+25+36+45)=382-114=268$ kg ribe. 3 BODA
Prema tome, svakom ribaru je tada ostalo po $268:4=67$ kg ribe. 3 BODA
Dakle, Frane je ulovio $67+8=75$, Ante $67+25=92$, Mate $67+36=103$ i
Jure $67+45=112$ kilograma ribe. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Prebrojimo dužine na svakom od četiriju polupravaca:
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 2 BODA
$\overline{AF}$, $\overline{FD}$, $\overline{AD}$ 2 BODA
$\overline{EF}$, $\overline{FB}$, $\overline{EB}$ 2 BODA
$\overline{ED}$, $\overline{DC}$, $\overline{EC}$ 2 BODA
Dakle, ukupno ima 12 dužina. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Ukupna vrijednost kovanica od 50 lipa iznosi $32\cdot 50=1600$ lipa $=16$ kuna. 1 BOD
Preostalo je $62-32=30$ kovanica od 2 kune i 5 kuna čija je ukupna vrijednost $100-16=84$ kune. 1 BOD
Očito je ukupna vrijednost kovanica od 2 kune paran broj. Nadalje, kako je ukupna vrijednost kovanica od 2 kune i 5 kuna paran broj (84), slijedi da je i ukupna vrijednost kovanica od 5 kuna paran broj. Zbog toga imamo paran broj kovanica od 5 kuna. 2 BODA
Stoga imamo sljedeću tablicu:

5 kuna	2 kune	vrijednost
2	28	$2\cdot 5+28\cdot 2=66$
4	26	$4\cdot 5+26\cdot 2=72$
6	24	$6\cdot 5+24\cdot 2=78$
8	22	$8\cdot 5+22\cdot 2=84$
10	20	$10\cdot 5+20\cdot 2=90$
...	...	...

Iz tablice vidimo da je u kasici–prasici bilo 8 kovanica od 5 kuna i 22 kovanice po 2 kune. 6 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Prema uvjetu zadatka, umnožak znamenki broja je 13, 14 ili 15. Kako se broj 13 ne može prikazati kao umnožak dvaju ili više jednoznamenkastih brojeva, zaključujemo da ne postoje četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki jednak 13. 1 BOD
Nadalje, $14=2\cdot 7=1\cdot 1\cdot 2\cdot 7$, pa četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki 14 imaju dvije znamenke 1 te po jednu znamenku 2 i 7. To su brojevi:
7211, 7121, 7112, 2711, 1721, 1712, 2171, 1271, 1172, 2117, 1217, 1127. Ima ih 12. 4 BODA
Slično, $15=3\cdot 5=1\cdot 1\cdot 3\cdot 5$, pa četveroznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenki

15 imaju dvije znamenke 1 te po jednu znamenku 3 i 5. To su brojevi:
5311, 5131, 5113, 3511, 1531, 1513, 3151, 1351, 1153, 3115,1315, 1135. Ima ih 12. 4 BODA
Dakle, četveroznamenkastih brojeva koji zadovoljavaju uvjet zadatka ima 24. 1 BOD
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

29. siječnja 2009.

1. Izračunaj:
$$48536 - 536 : 4 - (473 \cdot 117 - 117 \cdot 73) + 11 \cdot (37 - 0).$$

2. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000 koji nisu djeljivi ni sa 7 ni s 11?

3. Zbroj četiri broja je 2009. Treći broj je dva puta manji od prvog broja, za 6 manji od četvrtog broja i za 2 veći od drugog broja. Koji su to brojevi?

4. Zadan je pravokutnik $ABCD$. Duljina $|AB|$ pravokutnika, dva puta je veća od širine $|BC|$. Ako je točka P polovište od $\overline{AB}$, onda dužina $\overline{PC}$ dijeli pravokutnik na četverokut i trokut čiji se opsezi razlikuju za 20 cm. Kolika je površina pravokutnika $ABCD$?

5. Izračunaj zbroj svih umnožaka upisanih u tablicu:

$2004 \cdot 2006$	$2004 \cdot 2007$	$2004 \cdot 2008$	$2004 \cdot 2009$
$2005 \cdot 2006$	$2005 \cdot 2007$	$2005 \cdot 2008$	$2005 \cdot 2009$
$2006 \cdot 2006$	$2006 \cdot 2007$	$2006 \cdot 2008$	$2006 \cdot 2009$
$2007 \cdot 2006$	$2007 \cdot 2007$	$2007 \cdot 2008$	$2007 \cdot 2009$
$2008 \cdot 2006$	$2008 \cdot 2007$	$2008 \cdot 2008$	$2008 \cdot 2009$
$2009 \cdot 2006$	$2009 \cdot 2007$	$2009 \cdot 2008$	$2009 \cdot 2009$

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – rješenja

29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Poštujući redoslijed računskih operacija, te primjenom pravila distributivnosti, dobivamo:

$$\begin{aligned} & 48536 - 536 : 4 - (473 \cdot 117 - 117 \cdot 73) + 11 \cdot (37 - 0) \\ = \ & 48536 - 134 - 117 \cdot (473 - 73) + 11 \cdot 37 \end{aligned}$$

4 BODA

Dalje, lagano računamo:

$$\begin{aligned} & 48536 - 134 - 117 \cdot (473 - 73) + 11 \cdot 37 \\ = \ & 48402 - 117 \cdot 400 + 407 \\ = \ & 48402 - 46800 + 407 \\ = \ & 2009. \end{aligned}$$

6 BODOVA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Kako je $999 : 7 = 142$ i ostatak 5, zaključujemo da ima 142 broja manja od 1000 koji su djeljivi sa 7. 2 BODA

Kako je $999 : 11 = 90$ i ostatak 9, zaključujemo da ima 90 brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi s 11. 2 BODA

Dakle, trebamo od 999 oduzeti broj brojeva koji su djeljivi sa 7 i s 11. Međutim, među brojevima djeljivim sa 7 ima onih koji su djeljivi s 11 i obrnuto, među brojevima djeljivim s 11 ima onih koji su djeljivi sa 7. U oba slučaja to su brojevi koji su djeljivi sa $11 \cdot 7 = 77$. 1 BOD

Kako je $999 : 77 = 12$ i ostatak 75, zaključujemo da ima 12 brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi sa 77. 2 BODA

Dakle, broj traženih brojeva jednak je $999 - 142 - 90 + 12 = 779$, zato jer smo brojeve djeljive sa 77 dvaput oduzeli, pa smo ih jednom morali dodati. 3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Zadatak rješavamo grafički:

prvi broj	$\bigcirc\bigcirc$
drugi broj	$\bigcirc - 2$
treći broj	$\bigcirc$
četvrti broj	$\bigcirc + 6$

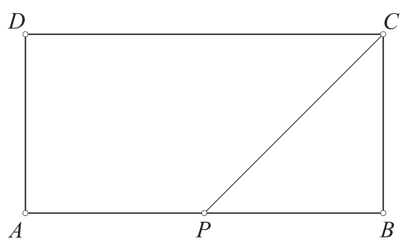
4 BODA

Označimo li $\bigcirc$ sa x slijedi da je $5x + 4 = 2009$, odakle je $5x = 2005$, pa je $x = 2005 : 5 = 401$. 2BODA

Konačno, prvi broj je jednak $2 \cdot 401 = 802$, drugi $401 - 2 = 399$, treći 401, te četvrti $401 + 6 = 407$. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Ako je $|BC| = b$, onda je $|AP| = |PB| = |AD| = b$ i $|DC| = 2b$.

Zato je opseg četverokuta $APCD$ jednak $b + b + 2b + |PC|$, a opseg trokuta PBC je $b + b + |PC|$. 3 BODA

Prema uvjetu zadatka, opsezi se razlikuju za 20 cm, pa je $2b = 20$, tj. $b = 10$ cm. 3 BODA
Kako je duljina jednaka dvostrukoj širini, slijedi da je $a = 20$ cm, pa je površina $P = 10 \cdot 20 = 200$ cm^2. 3 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Izlučimo li redom brojeve 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 u retcima, dobivamo:

$$\begin{aligned}
2004 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2004 \cdot 8030 \\
2005 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2005 \cdot 8030 \\
2006 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2006 \cdot 8030 \\
2007 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2007 \cdot 8030 \\
2008 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2008 \cdot 8030 \\
2009 \cdot (2006 + 2007 + 2008 + 2009) &= 2009 \cdot 8030.
\end{aligned}$$

6 BODOVA

Zbrojimo sada retke. Izlučimo li broj 8030, dobivamo da je traženi zbroj jednak

$$8030 \cdot (2004 + 2005 + 2006 + 2007 + 2008 + 2009) = 8030 \cdot 12039 = 96673170.$$

4BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

29. siječnja 2009.

1. Koliko puta je broj a veći od broja b ako je
$$a = \frac{7}{4} : 0.5 + \frac{10}{9} \cdot \left(3\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) \qquad \text{i} \qquad b = \frac{2}{5} : \left(1.1 - \frac{3}{4} - 0.5 : 2\right) \ ?$$

2. Otac ima pet sinova, pri čemu su svi sinovi različite starosti. Otac ima određenu količinu novca koju želi podijeliti petorici svojih sinova. Najmlađem će dati najmanje novca, a svakom sljedećem starijem po 45 kuna više. Najstariji sin će dobiti 13 puta više kuna nego najmlađi. Koliko će novaca dobiti sin koji je treći po starosti?

3. Marija često posjećuje baku. Ponekad ide pješice, a ponekad biciklom. Ako u jednom smjeru ide pješice, a vraća se biciklom, treba joj ukupno $\frac{3}{4}$ sata. Ako u oba smjera ide biciklom treba joj ukupno $\frac{1}{4}$ sata. Koliko će joj ukupno minuta trebati ako u oba smjera ide pješice?

4. Simetrala unutarnjeg kuta na osnovici $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC i simetrala kuta među krakovima sijeku se i određuju kut od $125°30'$. Koliko iznose unutarnji kutovi tog trokuta?

5. Površina trokuta ABC je 18 cm^2. Na stranici $\overline{AC}$ dana je točka D takva da je $|DC| = 2 \cdot |AD|$. Izračunaj površine trokutova ABD i DBC.

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
6. razred – rješenja
29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunajmo prvo brojeve a i b. Imamo da je

$$\begin{aligned} a &= \frac{7}{4} : 0.5 + \frac{10}{9} \cdot \left(3\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) = \frac{7}{4} : \frac{1}{2} + \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{13}{4} + \frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{10}{9} \cdot \frac{65+16}{20} = \frac{7}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{2} = \frac{7}{2} + \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8. \end{aligned}$$

4 BODA

Slično je

$$\begin{aligned} b &= \frac{2}{5} : \left(1.1 - \frac{3}{4} - 0.5 : 2\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} : 2\right) \\ &= \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{5} : \left(\frac{11}{10} - 1\right) = \frac{2}{5} : \frac{1}{10} = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4. \end{aligned}$$

4 BODA

Konačno, kako je $\frac{a}{b} = \frac{8}{4} = 2$, zaključujemo da je broj a dva puta veći od broja b. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je najmlađi sin dobio x kuna. Tada su ostali sinovi dobili
$x + 45$, $x + 90$, $x + 135$, $x + 180$ kuna, redom po starosti u rastućem poretku. 4 BODA
Prema uvjetu zadatka, najstariji sin će dobiti 13 puta više kuna od najmlađeg,
pa vrijedi jednadžba $13x = x + 180$, tj. $12x = 180$, odakle je $x = 15$. 4 BODA
Prema tome, sin koji je treći po starosti dobio je $x + 90 = 15 + 90 = 105$ kuna. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Kako Marija oba smjera biciklom prijeđe za $\frac{1}{4}$ sata, jedan smjer prijeđe za $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ sata. 3 BODA

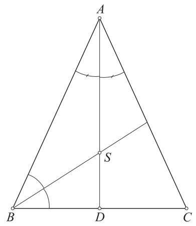
Nadalje, kako Marija prijeđe jedan smjer biciklom i jedan pješice za $\frac{3}{4}$ sata,

slijedi da jedan smjer pješice prijeđe za $\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ sata. 3 BODA

Dakle, Marija oba smjera prijeđe pješice za $2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4}$ sata, a to je $\frac{5}{4} \cdot 60 = 5 \cdot 15 = 75$ minuta. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.

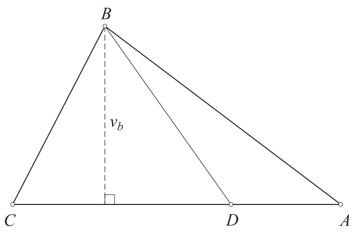


1 BOD

Neka je S sjecište simetrala kutova $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CAB$. Kako je $\sphericalangle BSA = 125°30'$, slijedi da je
$\sphericalangle BSD = 180° - 125°30' = 54°30'$. 3 BODA
Nadalje, iz pravokutnog trokuta BDS slijedi da je $\sphericalangle SBD = 90° - \sphericalangle BSD = 90° - 54°30' = 35°30'$. 2 BODA

Kako je pravac BS simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ zaključujemo da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 2 \cdot 35°30' = 71°$. 2 BODA
Preostaje još izračunati kut nasuprot osnovici: $\sphericalangle CAB = 180° - 2 \cdot 71° = 180° - 142° = 38°$. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Neka je $b = |AC|$ i v_b je duljina visine na tu stranicu. Za površinu trokuta ABC vrijedi
$P(ABC) = \dfrac{b \cdot v_b}{2} = 18$, odakle je $b \cdot v_b = 36$. 2BODA
Kako je $|DC| = 2|AD|$, slijedi da je $b = |AC| = |AD| + |DC| = |AD| + 2|AD| = 3|AD|$,
odakle je $|AD| = \dfrac{1}{3}b$. 2 BODA
Nadalje, kako trokuti ABD i ABC imaju zajedničku visinu duljine v_b, za površinu trokuta ABD vrijedi

$$P(ABD) = \frac{|AD| \cdot v_b}{2} = \frac{\frac{b}{3} \cdot v_b}{2} = \frac{b \cdot v_b}{6} = \frac{36}{6} = 6 \text{ cm}^2.$$

3 BODA
Konačno, za površinu trokuta DBC vrijedi $P(DBC) = P(ABC) - P(ABD) = 18 - 6 = 12 \text{ cm}^2$. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

29. siječnja 2009.

1. Ako je $a = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} - 1\right)$ i $b = \frac{2}{\frac{1}{3} - 2} : 2\frac{2}{5} + 2.5$, koliko je $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$?

2. Brodić za isto vrijeme prijeđe 34 km ploveći rijekom nizvodno, kao i 26 km ploveći uzvodno. Ako je brzina brodića po mirnoj vodi 15 km/h, kojom brzinom teče rijeka?

3. Frane i Duje brodovima prevoze turiste na cjelodnevni izlet do obližnjeg otoka. Frane je cijenu izleta po osobi naplaćivao za 80 kn više od Duje. Kada su to uočili, Frane je smanjio cijenu izleta za 10%, a Duje povećao za 15%. Nakon promjene cijena, izlet Dujinim brodom je za 8 kn po osobi skuplji od izleta Franinim brodom. Kolike su nove cijene izleta?

4. Zadan je pravokutnik $ABCD$. Nad kraćom stranicom $\overline{BC}$ konstruiran je jednakostraničan trokut BCE tako da točka E leži unutar pravokutnika. Nad stranicom $\overline{AB}$ konstruiran je jednakostraničan trokut AFB tako da je točka F izvan pravokutnika. Dokaži da je $|EF| = |BD|$.

5. Površina trokuta ABC jednaka je 12 cm^2. Na stranici $\overline{AB}$ dana je točka M takva da je $|AM| : |MB| = 1 : 2$. Nadalje, na stranici $\overline{AC}$ dana je točka N takva da je $|AN| : |NC| = 1 : 3$. Kolika je površina trokuta AMN?

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
7. razred – rješenja
29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunajmo prvo brojeve a i b. Imamo da je

$$a = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot (-5) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

3 BODA

Slično je

$$b = \frac{2}{\frac{1}{3} - 2} : 2\frac{2}{5} + 2.5 = \frac{2}{-\frac{5}{3}} : \frac{12}{5} + \frac{5}{2} = \frac{-6}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

4 BODA

Na kraju, dobivamo:

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{\frac{5}{2}}{2} - \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{25 - 16}{20} = \frac{9}{20}.$$

3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

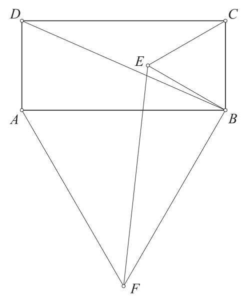
2. Neka je x brzina rijeke, izražena u km/h. Ukoliko se brodić kreće nizvodno,
njegova je brzina jednaka $15 + x$. 2 BODA
Ukoliko se brodić kreće uzvodno, njegova je brzina jednaka $15 - x$. 2 BODA
Kako brodić za isto vrijeme prijeđe put od 34 km nizvodno i put od 26 km uzvodno,
vrijedi razmjer $34 : (15 + x) = 26 : (15 - x)$. 2 BODA
Iz tog razmjera slijedi $34(15 - x) = 26(15 + x)$, tj. $510 - 34x = 390 + 26x$,
odnosno $60x = 120$, odakle je $x = 2$ km/h. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je x stara cijena izleta kod Duje izražena u kunama. Tada je $x + 80$ stara cijena izleta kod Frane. 1 BOD
Nakon promjene, nova cijena kod Frane je $0.9(x + 80)$, a kod Duje $1.15x$. 2 BODA
Kako je , prema uvjetu zadatka, razlika u novim cijenama 8 kn,
vrijedi jednadžba $1.15x - 8 = 0.9(x + 80)$, odakle je $0.25x = 80$, odnosno $x = 320$. 3 BODA
Dakle, nova cijena kod Duje je $1.15 \cdot 320 = 368$ kn, a kod Frane $0.9 \cdot 400 = 360$ kn. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

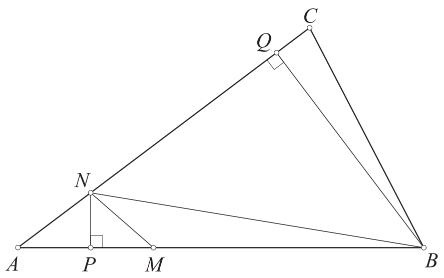
Promatrajmo trokute FBE i ABD. Dokazat ćemo da su oni sukladni.
Očito, vrijedi $|AD| = |BE|$ zato jer je trokut BCE jednakostraničan. 1 BOD
Slično, vrijedi $|AB| = |BF|$ zato jer je trokut AFB jednakostraničan. 1 BOD
Dokažimo da je $\sphericalangle FBE$ pravi. Naime, kako je trokut BCE jednakostraničan, slijedi da je
$\sphericalangle ABE = 90° - 60° = 30°$, pa je $\sphericalangle FBE = \sphericalangle FBA + \sphericalangle ABE = 60° + 30° = 90°$. 3 BODA

Dakle, trokuti FBE i ABD se podudaraju u dvije stranice i kutu među njima,
pa su oni sukladni prema poučku $S-K-S$. 2 BODA

Iz dobivene sukladnosti zaključujemo kako se trokuti FBE i ABD podudaraju u svim elementima,
pa je $|EF|=|BD|$, što je i trebalo dokazati. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Kako je $|AM|:|MB|=1:2$, slijedi da je $|AM|=\frac{1}{3}|AB|$. Slično, zbog $|AN|:|NC|=1:3$,
vrijedi $|AN|=\frac{1}{4}|AC|$. 1 BOD

Usporedimo površine trokuta AMN i ABN. Ta dva trokuta imaju zajedničku visinu, povučenu iz točke N, pa im se površine odnose kao odgovarajuće osnovice. Dakle, imamo

$$\frac{P(AMN)}{P(ABN)}=\frac{\frac{|AM|\cdot|NP|}{2}}{\frac{|AB|\cdot|NP|}{2}}=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{1}{3},$$

pri čemu je P nožište visine iz točke N na pravac AB. Zbog toga je $P(AMN)=\frac{1}{3}P(ABN)$. 3 BODA

Slično, usporedimo površine trokuta ABN i ABC. Ta dva trokuta imaju zajedničku visinu, povučenu iz vrha B, pa im se površine odnose kao odgovarajuće osnovice. Dakle, imamo

$$\frac{P(ABN)}{P(ABC)}=\frac{\frac{|AN|\cdot|BQ|}{2}}{\frac{|AC|\cdot|BQ|}{2}}=\frac{|AN|}{|AC|}=\frac{1}{4},$$

pri čemu je Q nožište visine iz točke B na pravac AC.

Zbog toga je $P(ABN)=\frac{1}{4}P(ABC)=\frac{1}{4}\cdot 12=3\ \mathrm{cm}^2$. 3 BODA

Konačno, vrijedi $P(AMN)=\frac{1}{3}P(ABN)=\frac{1}{3}\cdot 3=1\ \mathrm{cm}^2$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

29. siječnja 2009.

1. Usporedi brojeve x i y ako je
$$x = 1\frac{4}{5} - 0.2 : \left(1 - \sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^2 \quad \text{i} \quad y = \sqrt{2} + 2.5 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)^2.$$

2. U nekom razredu je 12 dječaka i 18 djevojčica. Na ispitu znanja prosjek razreda bio je 90 bodova. Ako su dječaci postigli prosjek 87 bodova, koliki je prosjek djevojčica?

3. Zadan je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka su P i Q redom polovišta kateta $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Izračunaj duljinu hipotenuze $\overline{AB}$ ako je $|AP| = 5$ cm i $|BQ| = \sqrt{40}$ cm.

4. Unutar jednakostraničnog trokuta odabrana je točka T koja je od stranica trokuta udaljena redom za 1 cm, 2 cm i 3 cm. Kolika je površina tog trokuta?

5. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $4x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x + 8$. Za koji x i y će taj izraz imati najmanju vrijednost?

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
8. razred – rješenja
29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunajmo broj x:

$$x = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} : \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

4 BODA

Slično, uporabom formule za kvadrat zbroja, imamo

$$y = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1\right) = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{2} - 1 = 1.$$

4 BODA

Dakle, vrijedi da je $x = y$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Kako su dječaci postigli prosjek 87 bodova, oni su zajedno sakupili $12 \cdot 87 = 1044$ boda. 1 BOD

Djevojčice su zajedno sakupile $18x$ bodova, pri čemu je x njihov prosjek koji trebamo izračunati. 1 BOD

Prema tome, učenici su zajedno sakupili $1044 + 18x$ bodova. 1 BOD

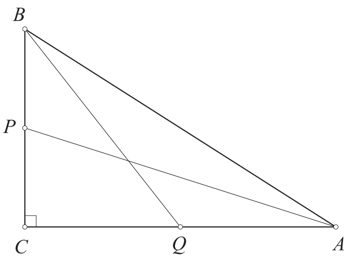
U razredu ima $12 + 18 = 30$ učenika. 1 BOD

Kako je prosjek razreda 90 bodova, vrijedi jednadžba $\dfrac{1044 + 18x}{30} = 90.$ 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $1044 + 18x = 2700$, odnosno $18x = 2700 - 1044 = 1656$,
odakle je $x = \dfrac{1656}{18} = 92.$ 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Označimo duljine kateta i hipotenuze na uobičajen način: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.



1 BOD

Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutne trokute APC i BCQ, dobivamo sljedeće dvije jednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + b^2 &= |AP|^2 = 25, \\ a^2 + \frac{b^2}{4} &= |BQ|^2 = 40. \end{aligned}$$

4 BODA

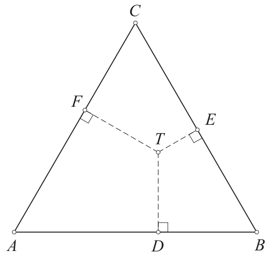
Zbrajanjem tih dviju jednakosti slijedi jednakost $\dfrac{5}{4}\left(a^2 + b^2\right) = 65.$ 2 BODA

Međutim, zbog Pitagorinog poučka je $a^2 + b^2 = c^2$, pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost
dobivamo da je $\dfrac{5}{4}c^2 = 65$, odnosno $c^2 = 52$. 2 BODA

Konačno, $c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm. 1 BOD

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka su D, E, F redom nožišta okomica iz točke T na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ kao na slici:



1 BOD

Prema uvjetu zadatka je $|TD| = 1$, $|TE| = 2$ i $|TF| = 3$. Prikažimo sada površinu trokuta ABC kao zbroj površina triju trokuta:

$$P(ABC) = P(ABT) + P(BCT) + P(CAT).$$

2 BODA

Kako je površina trokuta jednaka umnošku duljina stranice i visine, imamo da je

$$P(ABC) = \frac{a \cdot |TD|}{2} + \frac{a \cdot |TE|}{2} + \frac{a \cdot |TF|}{2} = \frac{a}{2}\left(|TD| + |TE| + |TF|\right) = \frac{a}{2}(1+2+3) = 3a.$$

3 BODA

S druge strane, površina jednakostraničnog trokuta je $P(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, pa

izjednačavanjem dobivenih dvaju izraza za površinu slijedi da je $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a$,

odakle je $a = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. 2 BODA

Konačno, iz formule za površinu trokuta dobivamo $P(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Zapišimo dani izraz u drugom obliku, služeći se formulom za kvadrat zbroja:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x + 8 &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x^2 + 12x + 12 - 4 \\ &= (x+2y)^2 + 3(x^2 + 4x + 4) - 4 \\ &= (x+2y)^2 + 3(x+2)^2 - 4. \end{aligned}$$

5 BODOVA

Kako je kvadrat broja uvijek nenegativan, zaključujemo da je $(x+2y)^2 \geq 0$ i $(x+2)^2 \geq 0$, pa se najmanja vrijednost postiže kada je $(x+2y)^2 = (x+2)^2 = 0$, te je ona jednaka -4. 3 BODA

Najmanja vrijednost se postiže kada je $x + 2y = 0$ i $x + 2 = 0$. Iz druge jednadžbe slijedi da je $x = -2$, a iz prve $y = -\dfrac{x}{2} = -\dfrac{-2}{2} = 1$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA