Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

29. siječnja 2009.

UPUTE:

Na poleđini ovog lista nalazi se 8 zadataka.

Prvih 5 zadataka vrijedi po 8 bodova.
Potpuno riješen zadatak nosi 8 bodova, a rješenje s manjom greškom 4 boda.

Zadaci 6., 7. i 8. vrijede po 20 bodova i detaljno se boduju.

Vrijeme rješavanja je 180 minuta.

Nije dopuštena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

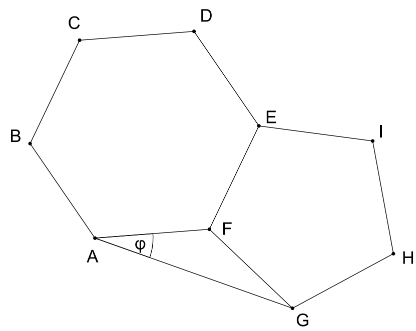
1. (8) Skrati razlomak $\dfrac{a^4-2a^3-2a^2+2a+1}{(a+1)(a+2)}$.

2. (8) Ako dvoznamenkastom broju s lijeve strane dopišemo znamenku 3, dobit ćemo broj čiji je dvokratnik 27 puta veći od zadanog dvoznamenkastog broja.
Odredi taj dvoznamenkasti broj.

3. (8) Odredi najveći cijeli broj n za koji vrijedi nejednakost $3(n-\frac{5}{3})-2(4n+1)>6n+5$.

4. (8) Koliko djelitelja ima broj 288 ?

5. (8) Na slici su pravilni šesterokut $ABCDEF$ i pravilni peterokut $EFGHI$.
Odredi kut $\sphericalangle FAG$.



6. (20) Trapez $ABCD$ ima pravi kut pri vrhu B, a dijagonala $\overline{BD}$ je okomita na krak AD. Duljina kraka $\overline{BC}$ je $5\,\text{cm}$, a duljina dijagonale $\overline{BD}$ je $13\,\text{cm}$.
Izračunaj površinu trapeza $ABCD$.

7. (20) Na proslavi Aninog rođendana, nakon prvog oglašavanja zvona na ulaznim vratima došao je jedan gost. Nakon drugog, i svakog sljedećeg zvonjenja, došla su dva gosta više nego prethodni put. Ako se zvono oglasilo n puta, koliko je ukupno bilo gostiju na proslavi?

8. (20) Odredi sve prirodne brojeve n za koje je n^2-440 potpuni kvadrat.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Skrati razlomak $\dfrac{(2^{n-1}+1)^2-4^{n-1}}{4^n+2^{n+1}+1}$.

2. (8) U pravokutnom trokutu duljina visine na hipotenuzu je 4 cm, a duljina težišnice iz vrha pravog kuta 5 cm. Odredi zbroj duljina kateta tog trokuta.

3. (8) U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle CAB = 35^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Ako je t tangenta na kružnicu opisanu tom trokutu s diralištem u vrhu C, a p paralela s pravcem AB kroz vrh C, odredi kut između pravaca p i t.

4. (8) Dani su kompleksni brojevi $z = 7 - i$, $w = -3 + 4i$. Odredi $\left|\dfrac{z^{20}}{\overline{w}^{10}}\right|$.

5. (8) Neka su x_1, x_2 različita rješenja jednadžbe $2x^2 - 3x + 4 = 0$. Izračunaj $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

6. (20) Žicu duljine 1 m treba razrezati i od dobivenih dijelova napraviti jedan jednakostranični trokut i jedan kvadrat. Cijelu žicu treba iskoristiti. Odredi duljinu stranice trokuta i duljinu stranice kvadrata tako da zbroj površina trokuta i kvadrata bude što manji.

7. (20) Odredi prirodne brojeve a, b i c tako da vrijedi jednakost $(a + bi)^3 - 107i = c$. (i je imaginarna jedinica.)

8. (20) Odredi $a > 0$ tako da površina lika omeđenog grafovima funkcija

$$y = |ax - 3| + |ax + 3| \qquad \text{i} \qquad y = 10$$

bude jednaka 8.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Riješi jednadžbu $4^{\log x} - 32 + x^{\log 4} = 0$.

2. (8) Riješi nejednadžbu

$$\log_2(1 - 2\cos x) + \log_{\frac{1}{2}}(1 + 2\cos x) \leq 0$$

u intervalu $[0, 2\pi]$.

3. (8) Zadan je kompleksan broj $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$. Odredi $|z|$. Rješenje zapiši bez oznake korjenovanja.

4. (8) Ako za duljine a, b, c stranica trokuta vrijedi $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, odredi kut nasuprot stranice c.

5. (8) Polumjer osnovke kružnog stošca je r. Jedan osni presjek tog stošca je raznostraničan trokut s kutovima α i β $(\alpha \neq \beta)$ uz promjer osnovke. Izrazi obujam tog stošca pomoću r, α i β.

6. (20) Neka su α, β i γ kutovi takvi da vrijedi $\beta = 60^\circ + \alpha$ i $\gamma = 60^\circ + \beta$. Dokaži da je vrijednost izraza

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha$$

cijeli broj kad god je izraz definiran.

7. (20) Pokaži da za svaki trokut s kutovima α, β i γ te polumjerima r i R upisane i opisane kružnice redom, vrijedi jednakost $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{4R\sin^2\frac{\gamma}{2}}{r}$.

8. (20) Odredi sve cijele brojeve x za koje je $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ cijeli broj.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.

2. (8) Treći član u razvoju binoma $\left(2 \cdot \sqrt[n]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4-n]{4}}\right)^6$ je 240. Odredi n.

3. (8) Izračunaj $\left(1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)^{14}$.

4. (8) Tri različita realna broja, različita od nule, čine aritmetički niz, a njihovi kvadrati u istom poretku čine geometrijski niz. Odredi sve moguće vrijednosti kvocijenta tog geometrijskog niza.

5. (8) Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je broj $\frac{2009-n}{99}$ prirodan?

6. (20) Jedno od žarišta (fokusa) elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je žarište parabole $y^2 = 2px$, a pravac $3x - 5y + 25 = 0$ je njihova zajednička tangenta. Dokaži da je trokut kojeg određuju zajedničko žarište i dva dirališta tangente pravokutan.

7. (20) Kut pri vrhu osnog presjeka uspravnog stošca je 2α, a polumjer osnovke r. U taj stožac je upisana pravilna šesterostrana prizma čiji su svi bridovi jednake duljine (jedna osnovka prizme leži u ravnini osnovke stošca, a preostali vrhovi na plaštu stošca). Izračunaj oplošje prizme pomoću α i r.

8. (20) Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \text{ za } n \geq 3.$$

Dokaži da vrijedi nejednakost $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

Zadatak A-1.1. (8 bodova)

Skrati razlomak $\dfrac{a^4-2a^3-2a^2+2a+1}{(a+1)(a+2)}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\frac{a^4-2a^3-2a^2+2a+1}{(a+1)(a+2)} &= \frac{a^4-2a^2+1-2a^3+2a}{(a+1)(a+2)} = \frac{(a^2-1)^2-2a(a^2-1)}{(a+1)(a+2)} \\
&= \frac{(a^2-1)(a^2-1-2a)}{(a+1)(a+2)} = \frac{(a-1)(a+1)(a^2-1-2a)}{(a+1)(a+2)} \\
&= \frac{(a-1)(a^2-2a-1)}{a+2} \quad \text{ili} \quad \frac{a^3-3a^2+a+1}{a+2}
\end{aligned}$$

Za 4 boda: izlučen faktor $(a+1)$ u brojniku, uz grešku u drugoj zagradi.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-1.2. (8 bodova)

Ako dvoznamenkastom broju s lijeve strane dopišemo znamenku 3, dobit ćemo broj čiji je dvokratnik 27 puta veći od zadanog dvoznamenkastog broja.
Odredi taj dvoznamenkasti broj.

Rješenje.
Neka je $\overline{xy} = 10x + y$ traženi dvoznamenkasti broj. Vrijedi

$$2 \cdot \overline{3xy} = 27 \cdot \overline{xy} \qquad (*)$$

$$2 \cdot (300 + \overline{xy}) = 27 \cdot \overline{xy}$$

$$600 + 2 \cdot \overline{xy} = 27 \cdot \overline{xy}$$

$$600 = 25 \cdot \overline{xy}$$

Traženi broj je $\overline{xy} = 24$.

Za 4 boda: dobro postavljen zadatak, barem (*) ili ekvivalentno.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-1.3. (8 bodova)

Odredi najveći cijeli broj n za koji vrijedi nejednakost $3(n-\frac{5}{3})-2(4n+1)>6n+5$.

Rješenje.
Dana nejednakost $3(n-\frac{5}{3})-2(4n+1)>6n+5$ redom je ekvivalentna s

$$3n-5-8n-2>6n+5,$$

$$-11n>12, \qquad (*)$$

$$n<-\frac{12}{11}.$$

Najveći cijeli broj koji zadovoljava ovu nejednakost je $n=-2$.

Za 4 boda: barem (*)
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-1.4. (8 bodova)

Koliko djelitelja ima broj 288 ?

Rješenje.
Rastavimo broj 288 na faktore:

$$288=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot=2^5\cdot 3^2.$$

Prvi način.
Djelitelj broja 288 nema prostih faktora osim 2 i 3.

Faktor 2 u djelitelju može se javljati 0,1,2,3,4 ili najviše 5 puta, pa imamo 6 mogućnosti.

Za pojavljivanje faktora 3 postoje tri mogućnosti: 3^0, 3^1, 3^2.

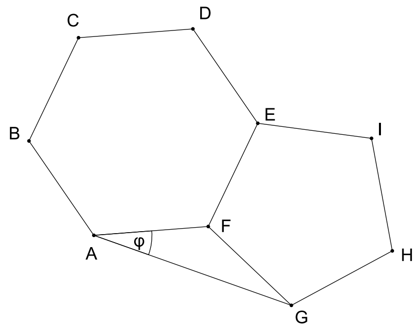
Ukupan broj djelitelja je $6\cdot 3=18$.

Drugi način.
Djelitelji su: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 72, 96, 144 i 288. Ima ih 18.

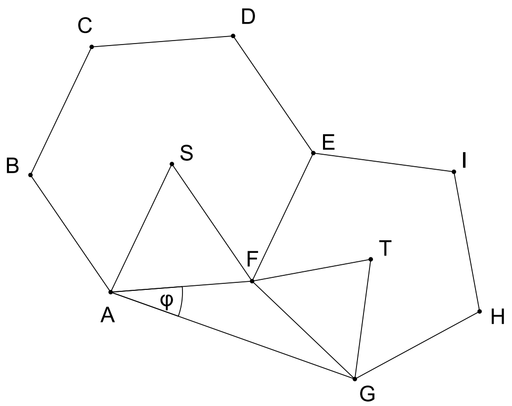
Za 4 boda: sitna greška u prebrojavanju.
Za 8 bodova: točan postupak i rezultat, ili navedeni točno svi djelitelji (bez rezultata "18").

Zadatak A-1.5. (8 bodova)

Na slici su pravilni šesterokut $ABCDEF$ i pravilni peterokut $EFGHI$.
Odredi kut $\sphericalangle FAG$.



Rješenje.
Neka je S središte pravilnog šesterokuta, a T središte pravilnog peterokuta.



Vrijedi $\sphericalangle ASF = 360°/6 = 60°$, pa je $\sphericalangle AFE = 120°$. Također je $\sphericalangle GTF = 360°/5 = 72°$, pa je $\sphericalangle EFG = 108°$. Stoga je $\sphericalangle AFG = 360° - \sphericalangle AFE - \sphericalangle EFG = 132°$. (*)

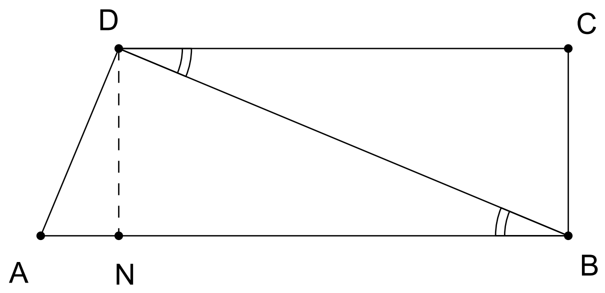
Trokut AFG je jednakokračan, $|AF| = |FG|$, pa vrijedi $\sphericalangle FAG = (180° - \sphericalangle AFG)/2 = 24°$.

Za 4 boda: barem "kutovi 120°, 108° i trokut AFG je jednakokračan" ili "kut $\sphericalangle AFG$ je 132°" ili dobar postupak s greškom u računu.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-1.6. (20 bodova)

Trapez $ABCD$ ima pravi kut pri vrhu B, a dijagonala $\overline{BD}$ je okomita na krak AD. Duljina kraka $\overline{BC}$ je $5\,\text{cm}$, a duljina dijagonale $\overline{BD}$ je $13\,\text{cm}$.
Izračunaj površinu trapeza $ABCD$.

Rješenje.
Prvi način.
Znamo $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|BD| = 13\,\text{cm}$.
Iz pravokutnog trokuta BCD slijedi $|CD| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\text{cm}$. (2 boda)



Uvedimo oznake $|AB| = a$, $|AD| = d$. Neka je N nožište visine trapeza povučene iz točke D. Tada je $|AN| = a - 12$, (2 boda)
pa iz pravokutnog trokuta AND dobivamo: $(a-12)^2 + 5^2 = d^2$. (5 bodova)
a iz trokuta ABD: $d^2 + 13^2 = a^2$. (5 bodova)

Rješavanjem dobivenog sustava dobivamo: $a = \dfrac{169}{12}\,\text{cm}$, (2 boda)
pa je $P = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{169}{12} + 12\right) \cdot 5$, $P = \dfrac{1565}{24}\,\text{cm}^2$. (4 boda)

Drugi način.
Znamo $|BC| = 5\,\text{cm}$, $|BD| = 13\,\text{cm}$.
Iz pravokutnog trokuta BCD slijedi $|CD| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,\text{cm}$. (2 boda)

Trokuti ABD i BDC su slični ($\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD = 90^\circ$).
(8 bodova)
Stoga vrijedi: $\dfrac{|AB|}{13} = \dfrac{13}{12}$, (4 boda)
odakle dobivamo $|AB| = \dfrac{169}{12}\,\text{cm}$, (2 boda)
i konačno: $P = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{169}{12} + 12\right) \cdot 5$, $P = \dfrac{1565}{24}\,\text{cm}^2$ $\left(= 65.208\dot{3}\,\text{cm}^2\right)$. (4 boda)

Zadatak A-1.7. (20 bodova)

Na proslavi Aninog rođendana, nakon prvog oglašavanja zvona na ulaznim vratima došao je jedan gost. Nakon drugog, i svakog sljedećeg zvonjenja, došla su dva gosta više nego prethodni put. Ako se zvono oglasilo n puta, koliko je ukupno bilo gostiju na proslavi?

Rješenje.
Nakon prvog zvona došao je jedan gost (1 je prvi neparni broj),
nakon drugog zvona došla su tri gosta (3 je drugi neparni broj),
nakon trećeg zvona došlo je pet gostiju (5 je treći neparni broj),
...
Nakon n-tog zvona došlo je $2n-1$ gostiju ($2n-1$ je n-ti neparni broj). (3 boda)

Označimo sa S_n ukupan broj gostiju nakon n-tog zvona:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1). \qquad \text{(5 bodova)}$$

Ovu sumu možemo izračunati na sljedeći način:

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n & = & 1 & + & 3 & + & \ldots & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\ S_n & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \ldots & + & 3 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & 2n & + & 2n & + & \ldots & + & 2n & + & 2n \end{array} \qquad \text{(8 bodova)}$$

Zaključujemo $2S_n = 2n \cdot n$, pa je $S_n = n^2$. Na proslavi je bilo n^2 gostiju. (4 boda)

Zadatak A-1.8. (20 bodova)

Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $n^2 - 440$ potpuni kvadrat.

Rješenje.
Neka je $n^2 - 440$ kvadrat broja k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Iz $n^2 - 440 = k^2$ slijedi $(n-k)(n+k) = 440$. (2 boda)

Kako je desna strana jednakosti paran broj, i produkt $(n-k)(n+k)$ mora biti paran, pa je bar jedan od brojeva $n-k$, $n+k$ paran. To je moguće jedino ako su n i k brojevi iste parnosti, a tada su oba broja $n-k$, $n+k$ parna. (5 bodova)

Broj $440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$ može se prikazati kao produkt dvaju parnih brojeva na četiri načina: $440 = 2 \cdot 220 = 4 \cdot 110 = 10 \cdot 44 = 20 \cdot 22$. (5 bodova)

Kako je $n - k \leq n + k$, dobivamo četiri sustava:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & n-k=2 & \text{c)} & n-k=10 \\ & n+k=220 & & n+k=44 \\[1em] \text{b)} & n-k=4 & \text{d)} & n-k=20 \\ & n+k=110 & & n+k=22 \end{array}$$

Iz tih sustava dobivamo sve tražene brojeve n: 111, 57, 27, 21. (8 bodova)

Napomena: Za *pogođeno* pojedinačno rješenje (npr. $n = 21$) dati po 2 boda.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

Zadatak A-2.1. (8 bodova)

Skrati razlomak $\dfrac{(2^{n-1}+1)^2-4^{n-1}}{4^n+2^{n+1}+1}$.

Rješenje.

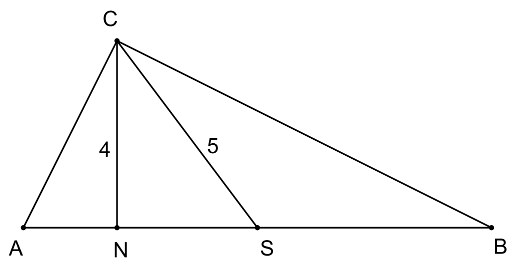
$$\frac{(2^{n-1}+1)^2-4^{n-1}}{4^n+2^{n+1}+1}=\frac{4^{n-1}+2\cdot 2^{n-1}+1-4^{n-1}}{4^n+2\cdot 2^n+1}=\frac{2^n+1}{(2^n+1)^2}=\frac{1}{2^n+1}$$

Za 4 boda: dobar postupak sa sitnom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-2.2. (8 bodova)

U pravokutnom trokutu duljina visine na hipotenuzu je 4 cm, a duljina težišnice iz vrha pravog kuta 5 cm. Odredi zbroj duljina kateta tog trokuta.

Rješenje.
Prvi način.
Neka je S polovište hipotenuze, a N nožište visine na hipotenuzu, te neka je $|AC|<|BC|$.
Točka S je središte kružnice opisane trokutu ABC, pa vrijedi $|AS|=|BS|=|CS|=5$.



Označimo $|NS|=x$. Iz pravokutnog trokuta CNS dobivamo $x^2+4^2=5^2$, odnosno $x=3\,\text{cm}$. Sada iz pravokutnih trokuta ANC i BNC dobivamo:

$$|AC|^2=(5-3)^2+4^2=20,\quad |BC|^2=(5+3)^2+4^2=80.$$

Duljine kateta su $a=|BC|=4\sqrt{5}\,\text{cm}$ i $b=|AC|=2\sqrt{5}\,\text{cm}$.
Zbroj duljina kateta iznosi $6\sqrt{5}\,\text{cm}$.

Drugi način.
Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze promatranog trokuta. Duljina težišnice iz vrha pravog kuta jednaka je polovini duljine hipotenuze, pa je $c = 10$.
Površinu pravokutnog trokuta možemo izraziti na dva načina, $P = \dfrac{c \cdot v}{2} = \dfrac{a \cdot b}{2}$.
Odatle slijedi $ab = 40$.
Osim toga vrijedi $a^2 + b^2 = 100$, pa rješavanjem sustava možemo dobiti a i b.

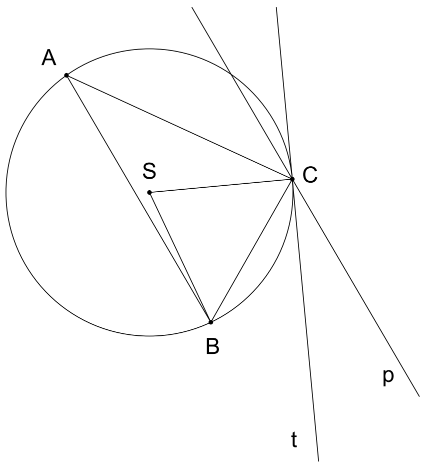
Zapravo nam ne trebaju a i b, već samo njihov zbroj, pa imamo:
$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2 \cdot ab = 100 + 2 \cdot 40 = 180$, i konačno $a + b = 6\sqrt{5}$.

Za 4 boda: dobar postupak s računskom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak ili točno određene duljine a i b.

Zadatak A-2.3. (8 bodova)

U trokutu ABC poznati su kutovi $\sphericalangle CAB = 35°$ i $\sphericalangle ABC = 60°$. Ako je t tangenta na kružnicu opisanu tom trokutu s diralištem u vrhu C, a p paralela s pravcem AB kroz vrh C, odredi kut između pravaca p i t.

Rješenje.
Mjera kuta koji zatvaraju pravac p i pravac BC jednaka je mjeri kuta $\sphericalangle ABC$, pa iznosi $60°$ (paralelni kraci).



Neka je S središte opisane kružnice. Kut $\sphericalangle BSC$ je $70°$ jer je to središnji kut tetive $\overline{BC}$ nad kojom je obodni kut $\sphericalangle BAC$ iznosa $35°$. Sada je $\sphericalangle SCB = 55°$ (iz jednakokračnog trokuta BCS), a kut između pravca BC i tangente t iznosi $90° - 55° = 35°$, jer je tangenta okomita na polumjer $\overline{SC}$.
(Do ove činjenice možemo doći i pomoću teorema o kutu između tetive i tangente: kut između tetive neke kružnice i tangente na tu kružnicu povučene u jedom od krajeva te tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.)
Konačno, kut između pravaca p i t iznosi $60° - 35° = 25°$.

Za 4 boda: dobar postupak s računskom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-2.4. (8 bodova)

Dani su kompleksni brojevi $z = 7 - i$, $w = -3 + 4i$. Odredi $\left|\dfrac{z^{20}}{\overline{w}^{10}}\right|$.

Rješenje.

$$\left|\frac{z^{20}}{\overline{w}^{10}}\right| = \frac{|z|^{20}}{|w|^{10}} = \frac{\sqrt{7^2+1^2}^{\,20}}{\sqrt{3^2+4^2}^{\,10}} = \frac{\sqrt{50}^{\,20}}{\sqrt{25}^{\,10}} = \frac{50^{10}}{5^{10}} = 10^{10}$$

Za 4 boda: dobar postupak sa sitnom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-2.5. (8 bodova)

Neka su x_1, x_2 različita rješenja jednadžbe $2x^2 - 3x + 4 = 0$. Izračunaj $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3}$.

Rješenje.
Iz Vieteovih formula dobivamo $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = 2$.

Vrijedi $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3} = \dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 \cdot x_2^3} = \dfrac{(x_1+x_2)^3 - 3 \cdot x_1 x_2 \cdot (x_1+x_2)}{(x_1 x_2)^3} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}}{2^3} = -\dfrac{45}{64}.$

Za 4 boda: dobar postupak s računskom greškom.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-2.6. (20 bodova)

Žicu duljine 1 m treba razrezati i od dobivenih dijelova napraviti jedan jednakostranični trokut i jedan kvadrat. Cijelu žicu treba iskoristiti. Odredi duljinu stranice trokuta i duljinu stranice kvadrata tako da zbroj površina trokuta i kvadrata bude što manji.

Rješenje.
Označimo s a duljinu stranice trokuta i s b duljinu stranice kvadrata.

Prema uvjetima zadatka vrijedi $3a + 4b = 1$, odnosno $b = \dfrac{1-3a}{4}$. (2 boda)

Ukupna površina je $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + b^2$, (2 boda)
odnosno

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{1-3a}{4}\right)^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1-6a+9a^2}{16} \\ &= \frac{1}{16}\left((4\sqrt{3}+9)a^2 - 6a + 1\right). \end{aligned}$$ (6 bodova)

Izraz u zagradi je kvadratna funkcija varijable a, i ima najmanju vrijednost za

$$a = \frac{6}{2(4\sqrt{3}+9)} = \frac{9-4\sqrt{3}}{11}.$$ (7 bodova)

Tada je $\quad b = \dfrac{1 - 3 \cdot \frac{9-4\sqrt{3}}{11}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}-4}{11}.$ (3 boda)

Zadatak A-2.7. (20 bodova)

Odredi prirodne brojeve a, b i c tako da vrijedi jednakost $(a+bi)^3 - 107i = c$.
(i je imaginarna jedinica.)

Rješenje.
Nakon kubiranja binoma i sređivanja izraza dobivamo

$$a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3 - 107)i = c.$$ (2 boda)

Kako su a, b i c realni, izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobivamo

$$a^3 - 3ab^2 = c, \quad 3a^2b - b^3 - 107 = 0.$$ (3 boda)

Iz druge jednakosti dobivamo $(3a^2 - b^2)b = 107$. Kako je 107 prost broj, a a i b prirodni, zaključujemo

$$3a^2 - b^2 = 107, \quad b = 1$$

ili

$$3a^2 - b^2 = 1, \quad b = 107.$$ (10 bodova)

U prvom slučaju je $3a^2 = 108$, $a = 6$, a u drugom slučaju $3a^2 = 11450$, pa $a \notin \mathbb{N}$. Sada iz jednakosti realnih dijelova polazne jednadžbe slijedi $c = a^3 - 3ab^2 = 6^3 - 3 \cdot 6 \cdot 1^2 = 198$.
(5 bodova)

Zadatak A-2.8. (20 bodova)

Odredi $a > 0$ tako da površina lika omeđenog grafovima funkcija

$$y = |ax - 3| + |ax + 3| \qquad \text{i} \qquad y = 10$$

bude jednaka 8.

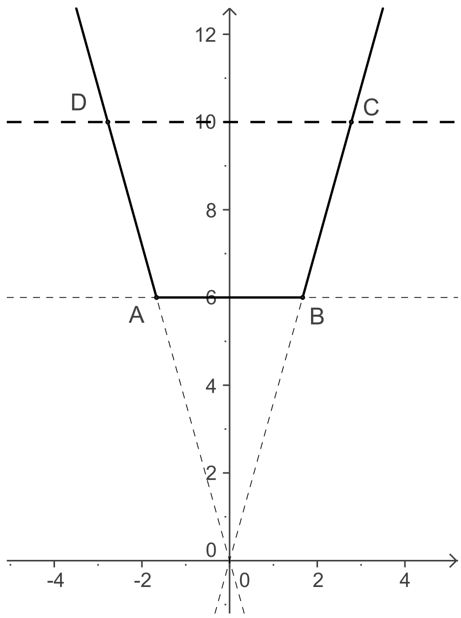
Rješenje.

Funkciju $y = |ax - 3| + |ax + 3|$ možemo zapisati po dijelovima bez apsolutne vrijednosti:

$$y = \begin{cases} -2ax, & x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{a} \right\rangle \\ 6, & x \in \left[-\frac{3}{a}, \frac{3}{a} \right] \\ 2ax, & x \in \left\langle \frac{3}{a}, \infty \right\rangle \end{cases}$$

(8 bodova)

Skicirajmo grafički prikaz promatranih funkcija i tražene površine:



Lik omeđen grafovima promatranih funkcija je trapez s vrhovima

$A(-\frac{3}{a}, 6)$, $B(\frac{3}{a}, 6)$, $C(\frac{5}{a}, 10)$, $D(-\frac{5}{a}, 10)$. (5 bodova)

Njegova površina iznosi $P = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{6}{a} + \dfrac{10}{a} \right) \cdot 4 = \dfrac{32}{a}$. (5 bodova)

Površina trapeza je jednaka 8 ako je $a = 4$. (2 boda)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

Zadatak A-3.1. (8 bodova)

Riješi jednadžbu $\quad 4^{\log x} - 32 + x^{\log 4} = 0$.

Rješenje.

Kako je $4^{\log x} = x^{\log 4}$, (*)

jednadžba je ekvivalentna redom s

$$2 \cdot 4^{\log x} = 32, \qquad 4^{\log x} = 16, \qquad \log x = 2,$$

te konačno $x = 100$.

Za 4 boda: barem (*)

Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.2. (8 bodova)

Riješi nejednadžbu

$$\log_2(1 - 2\cos x) + \log_{\frac{1}{2}}(1 + 2\cos x) \leq 0$$

u intervalu $[0, 2\pi]$.

Rješenje.

Da bi logaritmi bili definirani mora vrijediti: $1 - 2\cos x > 0$ i $1 + 2\cos x > 0$, odnosno $-\dfrac{1}{2} < \cos x < \dfrac{1}{2}$.

Koristeći svojstva logaritama, jednadžbu možemo zapisati u obliku: $\log_2 \dfrac{1 - 2\cos x}{1 + 2\cos x} \leq 0$,

odnosno $\dfrac{1 - 2\cos x}{1 + 2\cos x} \leq 1$. (*)

Nazivnik ovog razlomka je pozitivan (zbog uvjeta), pa nejednadžba nakon sređivanja postaje $\cos x \geq 0$.

Rješenje dane nejednadžbe u intervalu $[0, 2\pi]$ je:

$$x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right\rangle.$$

Za 4 boda: uvjeti i uklanjanje logaritma (*) ili riješeno do kraja uz zanemarivanje uvjeta (rezultat: $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$).

Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.3. (8 bodova)

Zadan je kompleksan broj $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Odredi $|z|$. Rješenje zapiši bez oznake korjenovanja.

Rješenje.
$|z| = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \sqrt{2 + 2\cos\alpha} = 2\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|.$

Za 4 boda: konačan rezultat bez modula: $2\cos\frac{\alpha}{2}$.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.4. (8 bodova)

Ako za duljine a, b, c stranica trokuta vrijedi $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$, odredi kut nasuprot stranice c.

Rješenje.
Dani izraz može se zapisati u obliku $(a+b)^2 - c^2 = 3ab$, odnosno $a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

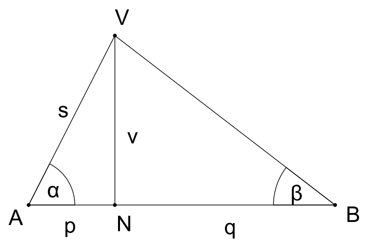
Prema poučku o kosinusima vrijedi $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{ab}{2ab} = \dfrac{1}{2}$, pa je $\gamma = 60^\circ$.

Za 4 boda: točno do rezultata $\cos\gamma = \frac{1}{2}$.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.5. (8 bodova)

Polumjer osnovke kružnog stošca je r. Jedan osni presjek tog stošca je raznostraničan trokut s kutovima α i β ($\alpha \neq \beta$) uz promjer osnovke. Izrazi obujam tog stošca pomoću r, α i β.

Rješenje.



Prvi način.
Promatrajmo opisani osni presjek. Uz oznake na slici vrijedi $p = v\operatorname{ctg}\alpha$ i $q = v\operatorname{ctg}\beta$, pa slijedi $2r = p + q = v(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$, odnosno $v = \dfrac{2r}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

Konačno

$$V = \frac{1}{3}\cdot r^2\pi \cdot v = \frac{2r^3\pi}{3(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}.$$

Drugi način.
Ako je v visina stošca, a s duljina izvodnice uz kut α, iz promatranog osnog presjeka zaključujemo da vrijedi $v = s \cdot \sin\alpha$. Zbog sinusovog poučka vrijedi i $\dfrac{s}{2r} = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
Sada lako dobijemo $v = \dfrac{2r\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, i konačno

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot v = \frac{2r^3\pi\sin\alpha\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}.$$

Za 4 boda: visina stošca izražena pomoću α, β i r.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-3.6. (20 bodova)

Neka su α, β i γ kutovi takvi da vrijedi $\beta = 60^\circ + \alpha$ i $\gamma = 60^\circ + \beta$. Dokaži da je vrijednost izraza

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha$$

cijeli broj kad god je izraz definiran.

Rješenje.
Vrijedi $\beta = 60^\circ + \alpha$, $\gamma = 120^\circ + \alpha$, pa je

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = \\ &= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha) + \operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(120^\circ+\alpha) + \operatorname{tg}(120^\circ+\alpha)\operatorname{tg}\alpha = (*).\end{aligned}$$

(5 bodova)

Prema adicijskim formulama je

$$\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha) = \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \operatorname{tg}(120^\circ+\alpha) = \frac{-\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}.$$

(5 bodova)

Stoga je

$$(*) = \operatorname{tg}\alpha\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{-\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} + \frac{-\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{tg}\alpha = \frac{9\operatorname{tg}^2\alpha-3}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} = -3.$$

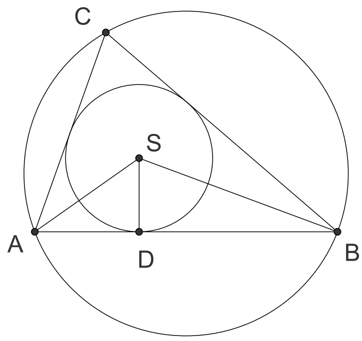
(10 bodova)

Dani izraz jednak je -3 kad god je definiran.

Zadatak A-3.7. (20 bodova)

Pokaži da za svaki trokut s kutovima α, β i γ te polumjerima r i R upisane i opisane kružnice redom, vrijedi jednakost $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}=\dfrac{4R\sin^2\frac{\gamma}{2}}{r}$.

Rješenje.



Jednakost koju treba dokazati može se zapisati ovako:

$$r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2})=4R\sin^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zbog

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\sin\gamma, \qquad \text{(5 bodova)}$$

potrebno je još pokazati da vrijedi

$$r(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2})=2R\sin\gamma.$$

Neka je ABC promatrani trokut, S središte njegove upisane kružnice te D diralište upisane kružnice i stranice $\overline{AB}$.

Zbog sinusovog poučka je $2R\sin\gamma=c=|AB|$. (2 boda)

Iz trokuta ADS je $|AD|=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, a iz trokuta BDS: $|BD|=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. (4 boda)

Dakle $c=|AB|=|AD|+|DB|=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$, (4 boda)
pa slijedi

$$r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)=2R\sin\gamma$$

te stoga vrijedi i jednakost iz zadatka. (3 boda)

Zadatak A-3.8. (20 bodova)

Odredi sve cijele brojeve x za koje je $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ cijeli broj.

Rješenje.

Neka je $\log_2(x^2 - 4x - 1) = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tada je $x^2 - 4x - 1 = 2^k$, odnosno $(x-2)^2 = 5 + 2^k$ (*) . (3 boda)

Ako je x cijeli broj, 2^k mora biti cijeli broj, pa je $k \geq 0$. (2 boda)

Za $k = 0$ dobivamo jednadžbu $(x-2)^2 = 6$ koja nema rješenja u $\mathbb{Z}$. (2 boda)

Za $k > 0$, broj $5 + 2^k$ je neparan, pa i x mora biti neparan. (2 boda)

Uvrstimo $x = 2n + 1$ u (*):

$(2n-1)^2 = 5 + 2^k$, $4n^2 - 4n + 1 = 5 + 2^k$, $2^k = 4(n(n-1) - 1)$, $2^{k-2} = n(n-1) - 1$.

(5 bodova)

Na desnoj strani je neparan broj, a to je jedino moguće za $k = 2$. (3 boda)

Tada je $n(n-1) = 2$; $n = 2$ ili $n = -1$; $x = 5$ ili $x = -1$. (3 boda)

Jedino za $x = -1$ i $x = 5$ vrijednost izraza $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ je cijeli broj.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2009.

Zadatak A-4.1. (8 bodova)

U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.

Rješenje.

Prvi način.

Iz jednadžbe vidimo da mora biti $x > 0$.

Zadana jednadžba ekvivalentna je s $x^{\frac{x}{2}} = x^{\sqrt{x}}$.

Ova jednakost vrijedi ako je $x = 1$ ili ako su eksponenti jednaki.

Iz jednadžbe $\dfrac{x}{2} = \sqrt{x}$ slijedi $x^2 - 4x = 0$, odnosno $x = 0$, $x = 4$.

Zbog uvjeta, rješenja polazne jednadžbe su samo $x = 1$ i $x = 4$.

Drugi način.

Iz jednadžbe vidimo da mora biti $x > 0$.

Kako su obje strane pozitivne, možemo logaritmirati: $\log x^{\frac{x}{2}} = \log x^{\sqrt{x}}$, pa slijedi $\frac{1}{2}x \log x = \sqrt{x} \log x$. Sada iz $\log x(\frac{1}{2}x - \sqrt{x})$ dobivamo dvije jednostavne jednadžbe: $\log x = 0$ i $\frac{1}{2}x = \sqrt{x}$, čija su rješenja $x = 1$ odnosno $x = 0$ i $x = 4$.

Zbog uvjeta, rješenja polazne jednadžbe su samo $x = 1$ i $x = 4$.

Za 4 boda: ispušteno rješenje $x = 1$ ili zadržano rješenje $x = 0$.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.2. (8 bodova)

Treći član u razvoju binoma $\left(2 \cdot \sqrt[n]{2^{-1}} + \dfrac{4}{\sqrt[4-n]{4}}\right)^6$ je 240. Odredi n.

Rješenje.

Treći član u razvoju danog binoma je $\dbinom{6}{2} \cdot \left(2^{\frac{n-1}{n}}\right)^4 \cdot \left(4^{\frac{3-n}{4-n}}\right)^2$. (*)

Izjednačavanjem s 240 dobivamo $15 \cdot 16^{\frac{n-1}{n}} \cdot 16^{\frac{3-n}{4-n}} = 240$, odnosno $16^{\frac{n-1}{n}+\frac{3-n}{4-n}} = 16$, što je ekvivalentno jednadžbi $\dfrac{n-1}{n} + \dfrac{3-n}{4-n} = 1$.

Odavde dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2 - 4n + 4 = 0$ s jedinim rješenjem $n = 2$.

Za 4 boda: dobar postupak s greškom u računu, obavezno točno (*).
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.3. (8 bodova)

Izračunaj $\left(1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)^{14}$.

Rješenje.

Prvi način.

Uočimo da je $1+\cos\frac{\pi}{7}=2\cos^2\frac{\pi}{14}$ i $\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}$.

Stoga je

$$\begin{aligned}
1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7} &= 2\cos^2\frac{\pi}{14}+2i\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\\
&= 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right).
\end{aligned}$$

Potenciranjem konačno dobivamo

$$\begin{aligned}
\left(1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}\right)^{14} &= \left(2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)\right)^{14}\\
&= 2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)^{14}\\
&= 2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}(\cos\pi+i\sin\pi)\\
&= -2^{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}\right)^{14}.
\end{aligned}$$

Drugi način.

Broj $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$ transformirajmo koristeći formule pretvorbe zbroja u umnožak:

$$\begin{aligned}
1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7} &= \cos 0+i\sin 0+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\\
&= \left(\cos 0+\cos\frac{\pi}{7}\right)+i\left(\sin 0+\sin\frac{\pi}{7}\right)\\
&= 2\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}+2i\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{14}\\
&= 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right).
\end{aligned}$$

Dalje nastavljamo kao u prvom rješenju.

Za 4 boda: dani broj prikazan u trigonometrijskom obliku ili dobar postupak i sitna greška u računu.

Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.4. (8 bodova)

Tri različita realna broja, različita od nule, čine aritmetički niz, a njihovi kvadrati u istom poretku čine geometrijski niz. Odredi sve moguće vrijednosti kvocijenta tog geometrijskog niza.

Rješenje.

Prvi način.
Neka su $a-d$, a i $a+d$ brojevi koji čine aritmetički niz. Članovi geometrijskog niza su $(a-d)^2$, a^2 i $(a+d)^2$. To znači da mora vrijediti $(a-d)^2(a+d)^2=(a^2)^2$, odnosno $(a^2-d^2)^2=a^4$, odakle slijedi $d=0$ ili $d=\pm a\sqrt{2}$.

Kvocijent geometrijskog niza može biti $q_1=1$ (za $d=0$), ili (za $d=\pm a\sqrt{2}$):

$$q_{2,3}=\frac{(a+d)^2}{a^2}=1+2\cdot\frac{d}{a}+\left(\frac{d}{a}\right)^2=1\pm 2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=3\pm\sqrt{2}.$$

Drugi način.
Označimo te realne brojeve s a, b i c. Kako je to aritmetički niz, vrijedi $a+c=2b$. (*)
Kako je a^2, b^2, c^2 geometrijski niz, vrijedi $a^2c^2=b^4$. (**)

Traženi kvocijent je $q=\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{c^2}{b^2}$.

Kvadriranjem (*) dobivamo $a^2+2ac+c^2=4b^2$, odnosno nakon dijeljenja s b^2:

$$\frac{a^2}{b^2}+2\cdot\frac{ac}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}=4. \qquad (***)$$

Iz (**) slijedi $b^2=|ac|$, pa je $\dfrac{ac}{b^2}=\pm 1$. Stoga iz (***) dobivamo dvije jednadžbe:

$$\frac{1}{q}+2+q=4 \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{q}-2+q=4,$$

odnosno njima ekvivalentne kvadratne jednadžbe: $q^2-2q+1=0$ i $q^2-6q+1=0$, s rješenjima $q_1=1$ odnosno $q_{2,3}=3\pm\sqrt{2}$.

Za 4 boda: barem jedno od rješenja $3\pm\sqrt{2}$.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.5. (8 bodova)

Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva n za koje je broj $\dfrac{2009-n}{99}$ prirodan?

Rješenje.

Broj $\dfrac{2009-n}{99}=\dfrac{1980+29-n}{99}=20+\dfrac{29-n}{99}$ će biti prirodan za

$$n\in\{29,\,29+1\cdot 99,\,29+2\cdot 99,\ldots,\,29+19\cdot 99\}.$$

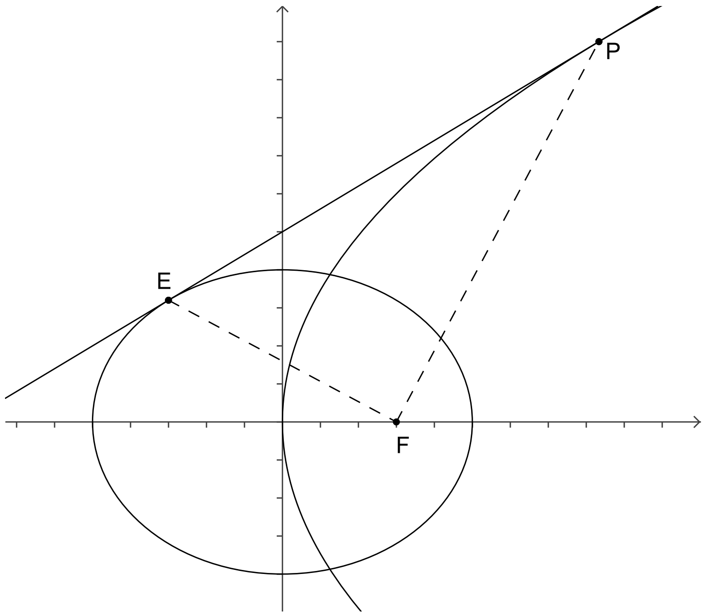
Zbroj tih brojeva iznosi $20\cdot 29+99(1+2+\ldots+19)=580+99\cdot\frac{19\cdot 20}{2}=19390$.

Za 4 boda: dobar postupak s greškom u računu.
Za 8 bodova: točan rezultat i postupak.

Zadatak A-4.6. (20 bodova)

Jedno od žarišta (fokusa) elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je žarište parabole $y^2 = 2px$, a pravac $3x - 5y + 25 = 0$ je njihova zajednička tangenta. Dokaži da je trokut kojeg određuju zajedničko žarište i dva dirališta tangente pravokutan.

Rješenje.



Iz uvjeta dodira danog pravca $y = \frac{3}{5}x + 5$ i parabole $y^2 = 2px$ dobivamo $p = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 5$, odnosno $p = 6$. (3 boda)

Stoga je jednadžba parabole $y^2 = 12x$, a zajedničko žarište elipse i parabole točka $F(3, 0)$. (2 boda)

Dakle, linearni ekscentricitet dane elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ je 3, pa je $a^2 - b^2 = 9$.
Iz uvjeta dodira danog pravca i elipse dobivamo jednadžbu $\frac{9}{25}a^2 + b^2 = 25$.
Zbrajanjem tih dviju jednadžbi odmah dobivamo $a = 5$, $b = 4$.
Jednadžba elipse je $16x^2 + 25y^2 = 400$. (4 boda)

Sada tražimo diralište pravca i elipse.
Uvrštavamo $y = \frac{3}{5}x + 5$ u jednadžbu elipse. Nakon sređivanja dobivamo jednadžbu $x^2 + 6x + 9 = 0$ s rješenjem $x = -3$, odakle slijedi $y = \frac{16}{5}$ pa je diralište pravca i elipse točka $E(-3, \frac{16}{5})$. (3 boda)

Za diralište pravca i parabole uvrštavamo $y = \frac{3}{5}x + 5$ u jednadžbu parabole. Sređivanjem se dobiva jednadžba $\frac{9}{25}x^2 - 6x + 25 = 0$ čije je rješenje $x = \frac{25}{3}$. Slijedi $y = 10$.
Tražena točka je $P(\frac{25}{3}, 10)$. (3 boda)

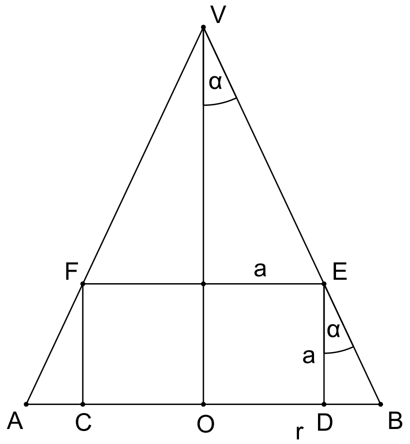
Koeficijenti smjera pravaca FE i FP su redom $\dfrac{\frac{16}{5} - 0}{-3 - 3} = -\dfrac{8}{15}$ te $\dfrac{10 - 0}{\frac{25}{3} - 3} = \dfrac{15}{8}$.
Iz toga odmah vidimo da su pravci FE i FP međusobno okomiti, tj. da je trokut EFP pravokutan. (5 bodova)

Zadatak A-4.7. (20 bodova)

Kut pri vrhu osnog presjeka uspravnog stošca je 2α, a polumjer osnovke r. U taj stožac je upisana pravilna šesterostrana prizma čiji su svi bridovi jednake duljine (jedna osnovka prizme leži u ravnini osnovke stošca, a preostali vrhovi na plaštu stošca). Izračunaj oplošje prizme pomoću α i r.

Rješenje.

Neka su svi bridovi upisane prizme duljine a i neka je ABV osni presjek danog stošca, a $CDEF$ presjek upisane prizme istom ravninom (vidi sliku). Lik $CDEF$ je pravokutnik sa stranicama duljina $|DE| = a$ i $|EF| = 2a$ (jer je $\overline{EF}$ duža dijagonala gornje baze prizme, pravilnog šesterokuta).



(5 bodova)

Kako je $\sphericalangle DEB = \sphericalangle OVB = \alpha$ (kutovi s paralelnim kracima),
iz pravokutnog trokuta DEB dobivamo $|DB| = |DE| \operatorname{tg} \alpha$, odnosno $r - a = a \operatorname{tg} \alpha$.
Odatle izrazimo $a = \dfrac{r}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$. (5 bodova)

Oplošje dane prizme je $O = 2 \cdot \dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4} + 6a^2 = a^2(3\sqrt{3} + 6)$. (5 bodova)

Uvrštavanjem izraza za a konačno dobivamo $O = \dfrac{r^2(3\sqrt{3} + 6)}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}$. (5 bodova)

Zadatak A-4.8. (20 bodova)

Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ za } n \geq 3.$$

Dokaži da vrijedi nejednakost $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

Tvrdnju dokazujemo jednom varijantom matematičke indukcije: u koraku indukcije pokazat ćemo da, ako tvrdnja vrijedi za neka dva uzastopna prirodna broja, ona vrijedi i za broj koji slijedi. Stoga je potrebno provjeriti da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$.

$a_1 = 1 < \frac{7}{4}$, $a_2 = 3 = \frac{48}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ pa je baza indukcije zadovoljena. (5 bodova)

Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{k-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2}$ i $a_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$. (5 bodova)

Sada raspisujemo:

$$\begin{aligned}
a_k &= a_{k-1} + a_{k-2} < \text{(po pretpostavci indukcije)} \\
&< \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} && \text{(3 boda)} \\
&= \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2}\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{11}{4} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{44}{16} \\
&< \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \cdot \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k-2} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^k. && \text{(5 bodova)}
\end{aligned}$$

Pokazali smo da vrijedi $a_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k$.

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

(2 boda)

Napomena: Ukoliko je baza indukcije provjerena samo za $n = 1$ oduzeti 5 bodova.
Ukoliko je pretpostavka indukcije da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj (a ne za dva uzastopna prirodna broja) oduzeti 5 bodova.
Tada se ipak može priznati preostalih 3+5+2 boda u nastavku.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

1. Za kupnju školskog autobusa koji će prevoziti djecu iz četiri mjesta A, B, C, D potrebno je 1 050 000 kn. Mjesta će snositi dio troškova srazmjerno broju stanovnika. U mjestu D je stanovnika koliko u mjestima A i C zajedno, u mjestu A je 25% manje stanovnika nego u B, a 20% više nego u C. Odredi kolike će iznose platiti pojedina mjesta.

2. U jednakokračnom trapezu srednjica je duljine l, a dijagonale su međusobno okomite. Odredi površinu trapeza.

3. Dokaži da za sve $x, y > 0$ vrijedi nejednakost
$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

4. Ima li jednadžba $x^2 + y^2 - 8z = 14$ cjelobrojnih rješenja? Ako ima, odredi ih. Ako nema, dokaži.

5. Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

1. Odredi, ako postoji, realni parametar k takav da je maksimalna vrijednost funkcije

$$f_1(x) = (k-8)x^2 - 2(k-5)x + k - 9$$

jednaka minimalnoj vrijednosti funkcije

$$f_2(x) = (k-4)x^2 - 2(k-1)x + k + 7.$$

2. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodni broj x, takav da je

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x+n+1}} = 1.$$

3. Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

4. Ako je zbroj kvadrata triju prostih brojeva a, b, c prost broj, dokaži da je barem jedan od brojeva a, b, c jednak 3.

5. Tri skakavca sjede u tri vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala dva te se smjesti u točku simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo takvih skokova stići u četvrti vrh kvadrata?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

1. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\operatorname{ctg}\left(2\pi\cos^2(2\pi x)\right) = 0.$$

2. Neka su a, b i c stranice trokuta te α, β i γ njima nasuprotni kutovi, redom. Dokaži da vrijedi

$$(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\cdot(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\cdot\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right).$$

3. U sferu S polumjera R upisan je prsten sastavljen od osam jednakih sfera manjeg polumjera, od kojih svaka dodiruje dvije susjedne, a sve dodiruju sferu S uzduž iste kružnice polumjera R. Sfera S_1 dodiruje svih osam manjih sfera i sferu S. Odredi polumjer sfere S_1 u ovisnosti o R. Konačno rješenje zapiši ne koristeći trigonometrijske funkcije.

4. Ako su $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ svi djelitelji prirodnog broja $n > 1$, dokaži da vrijedi

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k > k\sqrt{n}.$$

5. Kvadratna tablica 2009×2009 popunjena je brojevima 1, 2, 3,…, 2009 tako da se u svakom retku i svakom stupcu pojavljuje svaki od tih brojeva. Ako je tablica simetrična u odnosu na jednu dijagonalu, onda se i na toj dijagonali pojavljuju svi brojevi 1, 2, 3,…, 2009. Dokaži!

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

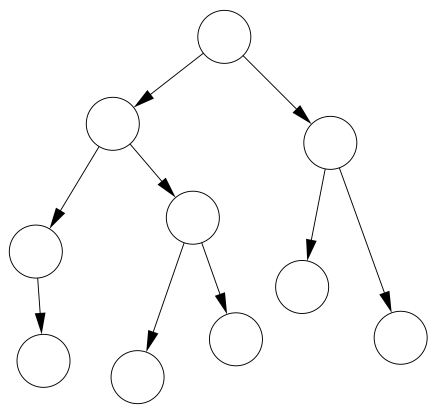
1. Dan je niz (a_n),

$$a_1 = 1, \qquad a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1}, \text{ za } n \geq 2.$$

Izrazi opći član niza a_n pomoću n.

2. Točka P je polovište tetive parabole $\mathcal{P}$ u čijim su krajevima povučene tangente na tu parabolu. Neka je T sjecište tih tangenata. Dokaži da polovište dužine $\overline{PT}$ leži na paraboli.

3. Na koliko načina možemo upisati brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u kružiće na slici tako da svaka strelica pokazuje od većeg broja prema manjem ?



4. Neka je a prirodni broj veći od 1. Dokaži da je broj

$$n(2n+1)(3n+1)\dots(an+1)$$

djeljiv sa svim prostim brojevima manjim od a, za svaki prirodan broj n.

5. Prvih 2010 prirodnih brojeva napisano je u nizu bilo kojim redom, a zatim je svakom od njih pribrojen njegov redni broj u tom nizu. Dokaži da među tako dobivenim zbrojevima postoje dva čija je razlika djeljiva s 2010.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Za kupnju školskog autobusa koji će prevoziti djecu iz četiri mjesta A, B, C, D potrebno je 1 050 000 kn. Mjesta će snositi dio troškova srazmjerno broju stanovnika. U mjestu D je stanovnika koliko u mjestima A i C zajedno, u mjestu A je 25% manje stanovnika nego u B, a 20% više nego u C. Odredi kolike će iznose platiti pojedina mjesta.

Rješenje.

Označimo broj stanovnika u mjestima A, B, C, D s a, b, c, d redom.

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

$$d = a + c, \qquad a = \frac{3}{4}b, \qquad a = \frac{6}{5}c, \tag{4 boda}$$

pa možemo te brojeve izraziti pomoću a:

$$b = \frac{4}{3}a, \quad c = \frac{5}{6}a, \quad d = a + \frac{5}{6}a = \frac{11}{6}a. \tag{6 bodova}$$

Dakle

$$a : b : c : d = 1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{6} : \frac{11}{6} = 6 : 8 : 5 : 11.$$

(5 bodova)

U dobivenom omjeru treba podijeliti iznos od 1050000 kn. Označimo iznose koje treba platiti pojedino mjesto s A, B, C, D.

Uvrštavanjem $A = 6k$, $B = 8k$, $C = 5k$, $D = 11k$
u izraz $A + B + C + D = 1050000$ dobivamo:

$$6k + 8k + 5k + 11k = 1050000, \tag{2 boda}$$

$$k = 35000. \tag{1 bod}$$

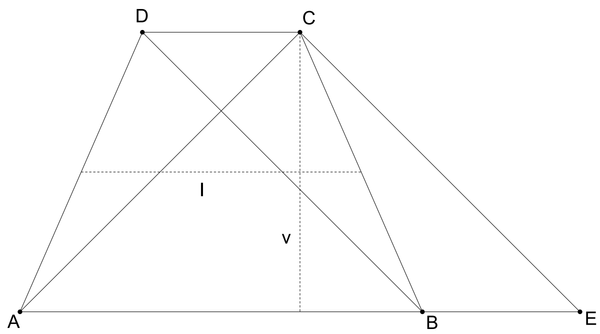
Iznosi troškova za pojedina mjesta su:

$$A = 210000\,\text{kn}, \quad \text{B} = 280000\,\text{kn}, \quad \text{C} = 175000\,\text{kn}, \quad \text{D} = 385000\,\text{kn}. \tag{2 boda}$$

Zadatak A-1.2.

U jednakokračnom trapezu srednjica je duljine l, a dijagonale su međusobno okomite. Odredi površinu trapeza.

Prvo rješenje.



Označimo: $|AB| = a$, $|CD| = c$, $|BD| = d$, a visinu trapeza sa v.

Primijetimo da su u jednakokračnom trapezu dijagonale sukladne, pa je $|AC| = |BD| = d$.

Prema uvjetima zadatka vrijedi $l = \dfrac{a+c}{2}$.

Produžimo dužinu $\overline{AB}$ do točke E tako da vrijedi $|BE| = |DC|$.

Tada je $BECD$ paralelogram i vrijedi $|CE| = |DB|$, i $\overline{CE} \parallel \overline{DB}$, pa je $|CE| = d$.

(5 bodova)

Trokut AEC je jednakokračan pravokutan trokut s katetama duljine d,
jer je $|AC| = |CE| = d$ i $AC \perp CE$ $(CE \parallel BD,\ BD \perp AC)$. (5 bodova)

Zato je visina v jednaka polovini duljine hipotenuze pravokutnog trokuta ACE, tj. $v = \dfrac{1}{2}|AE| = \dfrac{a+c}{2} = l$. (5 bodova)

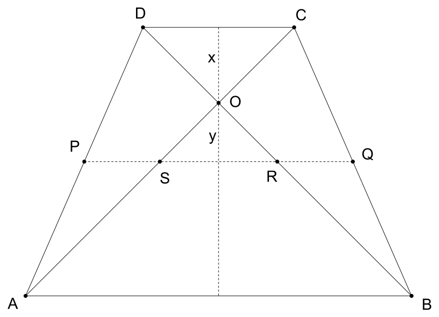
Konačno

$$P(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot v = l \cdot v = l^2.$$

(5 bodova)

Drugo rješenje.

Označimo: $|AB| = a$, $|CD| = c$. Neka je O sjecište dijagonala i neka su P, Q, R, S redom polovišta dužina $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AC}$.



Tada je $\overline{PQ}$ srednjica trapeza $ABCD$, $\overline{PS}$ srednjica trokuta ACD,

a $\overline{PR}$ srednjica trokuta DAB,

pa je $|PS| = \dfrac{c}{2}$, $|PR| = \dfrac{a}{2}$. (3 boda)

Slijedi $|SR| = |PR| - |PS| = \dfrac{a-c}{2}$. (2 boda)

Trokuti OSR i OCD su jednakokračni pravokutni trokuti,

pa su njihove visine x, y iz vrha O (vidi sliku) jednake polovici odgovarajuće hipotenuze,

tj. $x = \dfrac{1}{2}\,c$, $y = \dfrac{1}{2}\,|SR|$. (5 bodova)

Zato je visina cijelog trapeza $v = 2(x+y) = 2\left(\dfrac{c}{2} + \dfrac{a-c}{4}\right) = \dfrac{a+c}{2} = l$. (5 bodova)

Konačno, površina trapeza $ABCD$ je $P = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = l \cdot l = l^2$. (5 bodova)

Napomena: Površinu trapeza možemo izraziti pomoću d, jer je to četverokut s okomitim dijagonalama: $P = \frac{1}{2}d^2$. Tada je još potrebno izraziti d preko l, jer je l zadana veličina. Kao u prvom rješenju, potreban nam je trokut ACE iz kojeg po Pitagorinom poučku slijedi $d^2 + d^2 = (a+c)^2 = (2l)^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}$.

Zadatak A-1.3.

Dokaži da za sve $x, y > 0$ vrijedi nejednakost

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

Rješenje.

Vrijedi $x^4 + 1 \geq 2x^2$ (1)

i $y^3 + y \geq 2y^2$, (2)

pa zbrajanjem (1) i (2) dobivamo $x^4 + y^3 + y + 1 \geq 2x^2 + 2y^2$

iz čega je $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 \geq 3x^2 + 2y^2$. (10 bodova)

Treba još dokazati da vrijedi $3x^2 + 2y^2 > \frac{9}{2}xy$.

Primjenom A-G nejednakosti dobivamo $3x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{6}xy$, (5 bodova)

pa budući da je $2\sqrt{6} = \sqrt{24} > \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$, (3 boda)

vrijedi $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 \geq 2\sqrt{6}xy > \frac{9}{2}xy$. (2 boda)

Napomena: Ukoliko učenik dobije samo jednu od nejednakosti (1) i (2) dobiva 2 boda, a ukoliko dobije obje nejednakosti ali ih ne zbroji, dobiva 8 bodova.

U zadatku smo više puta primijenili nejednakost $a^2 + b^2 \geq 2ab$ koja vrijedi za $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadatak A-1.4.

Ima li jednadžba $x^2 + y^2 - 8z = 14$ cjelobrojnih rješenja? Ako ima, odredi ih. Ako nema, dokaži.

Rješenje.

Brojevi x i y moraju biti iste parnosti, jer bi inače $x^2 + y^2$ bilo neparno, pa bi na lijevoj strani bio neparan broj, a na desnoj strani 14. (4 boda)

Ako su oba broja x i y parna, lijeva strana je djeljiva sa 4, a desna nije. (4 boda)

Neka su oba broja x i y neparna. Tada je $x = 2m + 1$, $y = 2n + 1$ za neke $m, n, \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem u danu jednadžbu slijedi:

$$\begin{aligned}
(2m+1)^2 + (2n+1)^2 - 8z &= 14 \\
4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 - 8z &= 14 \\
m(m+1) + n(n+1) - 2z &= 3
\end{aligned}$$

(6 bodova)

Brojevi $m(m+1)$, $n(n+1)$ su parni (umnožak dva uzastopna prirodna broja), pa je na lijevoj strani paran broj, a na desnoj neparan.
Stoga ova jednadžba nema cjelobrojnih rješenja, (6 bodova)
pa ni dana jednadžba nema rješenja.

Zadatak A-1.5.

Marko je nacrtao pravokutnik dimenzija 20×15 i crtama ga podijelio na jedinične kvadrate. Koliko ukupno kvadrata ima na toj slici?

Prvo rješenje.

Brojimo kvadrate ovisno o dimenziji, tj. duljini stranice:

kvadrata stranice duljine 1 ima $20 \cdot 15$
kvadrata stranice duljine 2 ima $19 \cdot 14$
kvadrata stranice duljine 3 ima $18 \cdot 13$
$\vdots$ $\vdots$
kvadrata stranice duljine 15 ima $6 \cdot 1$ (12 bodova*)

Ukupan broj kvadrata je:

$$\begin{aligned} S &= 20 \cdot 15 + 19 \cdot 14 + 18 \cdot 13 + \cdots + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \\ &= 300 + 266 + 234 + 204 + 176 + 150 + 126 + 104 + 84 + 66 + 50 + 36 + 24 + 14 + 6 \\ &= 1840. \end{aligned}$$

(3 boda)

(5 bodova)

* ***Napomena.*** Ako je određen broj kvadrata stranice duljine d samo za nekoliko vrijednosti broja d dati najviše 5 bodova, i to: 1 bod za $d = 1$, 2 boda za bilo koji drugi d, a 5 bodova za najmanje tri različite vrijednosti od d.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju ustanovimo da kvadrata stranice duljine d ima $(21 - d)(16 - d)$. (12 bodova)

Zato je ukupan broj kvadrata:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{d=1}^{15} (21 - d)(16 - d) && \text{(3 boda)} \\ &= \sum_{d=1}^{15} (21 \cdot 16 - 37d + d^2) = 15 \cdot 21 \cdot 16 - 37 \sum_{d=1}^{15} d + \sum_{d=1}^{15} d^2 \\ &= 15 \cdot 21 \cdot 16 - 37 \cdot \frac{15 \cdot (15+1)}{2} + \frac{15 \cdot (15+1) \cdot (2 \cdot 15 + 1)}{6} && \text{(2+2 boda)} \\ &= 16 \cdot 15 \cdot \left(21 - \frac{37}{2} + \frac{31}{6}\right) = 240 \cdot \frac{23}{3} = 1840. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Napomena. U predzadnjem retku dati učeniku 2 boda za točno određen zbroj $\sum_{d=1}^{15} d$, i druga 2 boda za točno određen zbroj $\sum_{d=1}^{15} d^2$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Odredi, ako postoji, realni parametar k takav da je maksimalna vrijednost funkcije

$$f_1(x) = (k-8)x^2 - 2(k-5)x + k - 9$$

jednaka minimalnoj vrijednosti funkcije

$$f_2(x) = (k-4)x^2 - 2(k-1)x + k + 7.$$

Rješenje.

Da bi funkcija $f_1(x)$ imala maksimum, mora biti $k-8<0$, tj. $k<8$, (2 boda)

a da bi funkcija $f_2(x)$ imala minimum, mora biti $k-4>0$, tj. $k>4$. (2 boda)

Maksimalna vrijednost funkcije $f_1(x)$ je $\dfrac{4(k-8)(k-9)-4(k-5)^2}{4(k-8)}$, (2 boda)

tj. $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f_1(x) = \dfrac{47-7k}{k-8}$. (2 boda)

Minimalna vrijednost funkcije $f_2(x)$ je $\dfrac{4(k-4)(k+7)-4(k-1)^2}{4(k-4)}$, (2 boda)

tj. $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_2(x) = \dfrac{5k-29}{k-4}$. (2 boda)

Ekstremne vrijednosti tih funkcija se podudaraju pa vrijedi:

$$\frac{47-7k}{k-8} = \frac{5k-29}{k-4}.$$ (4 boda)

Sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu $k^2 - 12k + 35 = 0$
čija su rješenja $k=5$, $k=7$. (2 boda)

Oba broja zadovoljavaju uvjete $(4<k<8)$, pa su to traženi parametri. (2 boda)

Napomena: Učenik koji ne postavi uvjet $4<k<8$, ali na kraju provjeri da se ekstremne vrijednosti funkcija podudaraju, treba dobiti sve bodove.

Za $k=5$, $\max f_1(x) = -4 = \min f_2(x)$; za $k=7$, $\max f_1(x) = 2 = \min f_2(x)$.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodni broj x, takav da je

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x+n+1}}=1.$$

Rješenje.

Racionaliziranjem pojednostavnimo dane razlomke. Za $k=0,1,\ldots,n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1}} &= \frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}}{(\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1})(\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1})} \\
&= \frac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x+k+1}}{(x+k)-(x+k+1)} \\
&= \sqrt{x+k+1}-\sqrt{x+k}.
\end{aligned}$$

(5 bodova)

Tako dobivamo novu jednakost

$$(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})+\cdots+(\sqrt{x+n+1}-\sqrt{x+n})=1,$$

tj.

$$\sqrt{x+n+1}-\sqrt{x}=1,$$

(5 bodova)

odnosno $\sqrt{x+n+1}=\sqrt{x}+1$.

Nakon kvadriranja dobivamo $x+n+1=x+1+2\sqrt{x}$,

odakle je $n=2\sqrt{x}$, (5 bodova)

odnosno $x=\dfrac{n^2}{4}$.

Broj x je prirodan broj ako i samo ako je n paran, tj. $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$. (5 bodova)

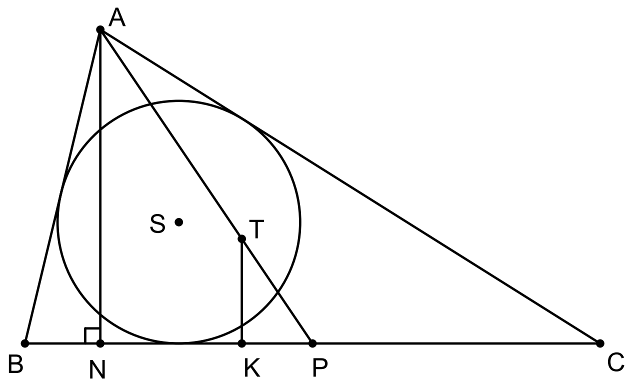
Zadatak A-2.3.

Ako je zbroj duljina dviju stranica raznostraničnog trokuta jednak dvostrukoj duljini treće stranice, dokaži da je pravac kroz središte upisane kružnice i težište trokuta paralelan sa stranicom koja je srednja po duljini.

Rješenje.

Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, i neka je a srednja po duljini. Tada vrijedi $2a = b + c$.
Opseg trokuta jednak je $3a$. (3 boda)

Neka je T težište trokuta, N nožište visine na stranicu duljine a, a K nožište okomice iz točke T na stranicu duljine a. Označimo s v duljinu visine na tu stranicu, s r polumjer upisane kružnice trokuta, a s P njegovu površinu.



Tada, zbog sličnosti trokuta TKP i ANP, vrijedi $|TK| = \frac{1}{3}v$. (5 bodova)

Kako je $P = \frac{1}{2}av = rs$, gdje smo sa s označili poluopseg trokuta,

slijedi $v = \frac{2P}{a} = \frac{2rs}{a} = \frac{2r \cdot \frac{3a}{2}}{a} = 3r$. (8 bodova)

Stoga je $|TK| = r$, što upravo znači da središte upisane kružnice i težište trokuta leže na pravcu koji je paralelan sa stranicom duljine a. (4 boda)

Zadatak A-2.4.

Ako je zbroj kvadrata triju prostih brojeva a, b, c prost broj, dokaži da je barem jedan od brojeva a, b, c jednak 3.

Prvo rješenje.

Pretpostavimo suprotno, da postoje prosti brojevi a, b, c različiti od 3, takvi da je $a^2 + b^2 + c^2$ prost broj.

Tada svaki od njih pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1 ili 2 (jer ne može biti djeljiv s 3), tj. može se zapisati u obliku $3k + 1$ ili $3k + 2$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. (3 boda)

Kvadrati takvih brojeva daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3: (3 boda)

$$\begin{aligned}(3k+1)^2 &= 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1,\\ (3k+2)^2 &= 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1.\end{aligned}$$

Znači da svaki od brojeva a^2, b^2, c^2 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 3,

pa je njihov zbroj djeljiv s 3. (8 bodova)

Stoga njihov zbroj nije prost broj (jer je očito veći od 3). (4 boda)

Sada je jasno da je pretpostavka bila pogrešna, pa zaključujemo da je barem jedan od brojeva a, b, c jednak 3. (2 boda)

Drugo rješenje.

Ovo rješenje temelji se na poznatoj činjenici da su svi prosti brojevi osim 2 i 3 oblika $6k + 1$ ili $6k - 1$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. (3 boda)

Kvadrat takvog broja daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 6. (2 boda)

Slično kao u prvom rješenju, uz istu pretpostavku, zaključujemo da ne mogu svi brojevi a, b, c biti veći od 3:

Kad bi brojevi a, b, c svi bili različiti od 2 i 3, tada bi $a^2 + b^2 + c^2$ davao ostatak 3 pri dijeljenju sa 6, (6 bodova)

tj. taj broj bi bio djeljiv s 3 i očito veći od 3, pa ne bi mogao biti prost broj. (3 boda)

Preostaje eliminirati mogućnost da su jedan, dva ili sva tri od brojeva a, b, c jednaki 2, a nijedan jednak 3:

Kad bi sva tri bila jednaka 2, tada bi bilo $a^2 + b^2 + c^2 = 12$, što nije prost broj. (1 bod)

Ako su dva među njima jednaka 2, a treći veći od 3, onda zbroj njihovih kvadrata $a^2 + b^2 + c^2$ daje ostatak 3 pri dijeljenju sa 6, a kako je veći od 3, ne može biti prost broj. (2 boda)

Ako je jedan od njih jednak 2, a preostala dva veća od 3, tada je zbroj njihovih kvadrata djeljiv sa 6, pa opet zaključujemo da $a^2 + b^2 + c^2$ nije prost broj. (2 boda)

Dakle, jedan od ta tri broja mora biti jednak 3. (1 bod)

Napomena: Oba rješenja mogu se zapisati i pomoću kongruencija.

Zadatak A-2.5.

Tri skakavca sjede u tri vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala dva te se smjesti u točku simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo takvih skokova stići u četvrti vrh kvadrata?

Rješenje.

Uvedimo koordinatni sustav takav da je ishodište u četvrtom ("praznom") vrhu kvadrata, a skakavci u točkama $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. (3 boda)

Kretanjem opisanim u zadatku jedna ili obje koordinate skakavca nakon skoka povećaju se ili smanje za 2, (7 bodova)

tako da svaki skakavac uvijek ima barem jednu neparnu koordinatu, jer je tako bilo na početku. (7 bodova)

Stoga niti jedan od njih ne može stići u točku $(0,0)$. (3 boda)

Napomena: Dati 5 bodova učeniku koji crtanjem i isprobavanjem zaključi, ali ne obrazloži, da skakavci mogu stići u sva polja s barem jednom neparnom koordinatom, ali ne i u polja s obje neparne koordinate. Pritom naravno nije potrebno da učenik spominje koordinate.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\operatorname{ctg}\left(2\pi\cos^2(2\pi x)\right) = 0.$$

Prvo rješenje.

Jednakost $\operatorname{ctg}(2\pi\cos^2(2\pi x)) = 0$ je ispunjena ako i samo ako vrijedi

$$2\pi\cos^2(2\pi x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \text{za neki } k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno

$$\cos^2(2\pi x) = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Vrijednosti funkcije $\cos^2(2\pi x)$ su iz intervala $[0,1]$, pa k može biti samo 0 ili 1.

(2 boda)

Za $k = 0$ dobivamo jednadžbu $\cos^2(2\pi x) = \frac{1}{4}$,

pa vrijedi $\cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$ ili $\cos(2\pi x) = -\frac{1}{2}$.

Rješenja jednadžbe $\cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$ su:

$$x \in \left\{\frac{1}{6} + m \mid m \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5}{6} + m \mid m \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \text{(2+2 boda)}$$

a rješenja jednadžbe $\cos(2\pi x) = -\frac{1}{2}$:

$$x \in \left\{\frac{1}{3} + m \mid m \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2}{3} + m \mid m \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \text{(2+2 boda)}$$

Do sada nađena rješenja se mogu zapisati i ovako:

$$x \in \left\{\frac{1}{6} + \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{1}{3} + \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Za $k=1$ dobivamo jednadžbu $\cos^2(2\pi x) = \dfrac{3}{4}$,

pa vrijedi $\quad \cos(2\pi x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad$ ili $\quad \cos(2\pi x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje jednadžbe $\cos(2\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ su:

$$x \in \left\{ \frac{1}{12} + m \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11}{12} + m \mid m \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \text{(2+2 boda)}$$

a rješenja jednadžbe $\cos(2\pi x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$x \in \left\{ \frac{5}{12} + m \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7}{12} + m \mid m \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad \text{(2+2 boda)}$$

Ta rješenja se mogu zapisati i ovako:

$$x \in \left\{ \frac{1}{12} + \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{12} + \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Skup svih rješenja dane jednadžbe možemo zapisati još jednostavnije:

$$x \in \left\{ \frac{1}{12} + \frac{m}{4} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{6} + \frac{m}{4} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Drugo rješenje.

Jednakost $\operatorname{ctg}(2\pi \cos^2(2\pi x)) = 0$ je ispunjena ako i samo ako vrijedi

$$2\pi \cos^2(2\pi x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \text{za neki } k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno

$$\cos^2(2\pi x) = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Jednadžba (*) ekvivalentna je s $\cos(4\pi x) = k - \dfrac{1}{2}$.

Vrijednosti funkcije $\cos(4\pi x)$ su iz intervala $[-1, 1]$, pa k može biti samo 0 ili 1.

(2 boda)

Za $k=0$ dobivamo jednadžbu $\cos(4\pi x) = -\dfrac{1}{2}$ koja ima rješenja:

$$x \in \left\{ \frac{1}{6} + \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3} + \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}. \qquad \text{(4+4 boda)}$$

Za $k=1$ dobivamo jednadžbu $\cos(4\pi x) = \dfrac{1}{2}$ koja ima rješenja:

$$x \in \left\{ \frac{1}{12} + \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{12} + \frac{m}{2} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}. \qquad \text{(4+4 boda)}$$

Zadatak A-3.2.

Neka su a, b i c stranice trokuta te α, β i γ njima nasuprotni kutovi, redom. Dokaži da vrijedi

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\cdot(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\cdot\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right).$$

Rješenje.

Transformirajmo lijevu stranu jednakosti koristeći formulu za površinu P trokuta

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{2P}{bc}+\frac{2P}{ac}+\frac{2P}{ab}$$ (8 bodova)

i poučak o kosinusima:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2P}{bc}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4P};$$ (6 bodova)

analogno

$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{4P},\quad \operatorname{ctg}\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{4P}.$$

Stoga je

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\frac{a^2+b^2+c^2}{4P}.$$ (4 boda)

Nakon množenja prve i zadnje jednakosti te skraćivanja sa $2P$ dobivamo jednakost koju je trebalo dokazati. (2 boda)

Zadatak A-3.3.

U sferu S polumjera R upisan je prsten sastavljen od osam jednakih sfera manjeg polumjera, od kojih svaka dodiruje dvije susjedne, a sve dodiruju sferu S uzduž iste kružnice polumjera R. Sfera S_1 dodiruje svih osam manjih sfera i sferu S. Odredi polumjer sfere S_1 u ovisnosti o R. Konačno rješenje zapiši ne koristeći trigonometrijske funkcije.

Rješenje.

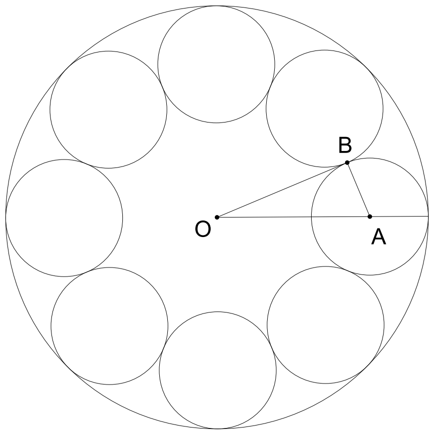
Označimo sa r polumjer svake od osam malih sfera, a s ρ traženi polumjer sfere S_1. Velika sfera S ima polumjer R.

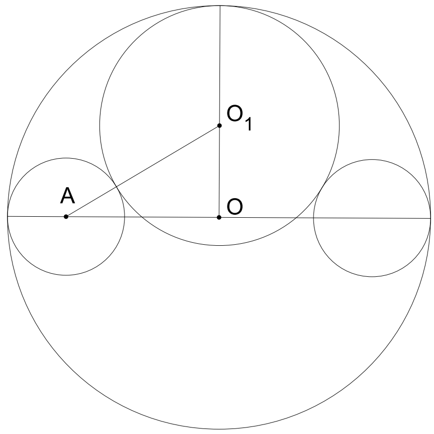
Promatrajmo presjek sfere S i danih osam sfera ravninom koja sadrži njihova dirališta sa sferom S. Želimo odrediti polumjer svake od osam malih sfera.

Promatrajući trokut AOB (vidi sliku) zaključujemo: $\dfrac{r}{R-r}=\sin\dfrac{\pi}{8}$ (5 bodova)

pa dobivamo

$$r=R\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}}.$$ (2 boda)





Promatrajmo sada presjek ravninom koja prolazi kroz središte O sfere S, središte O_1 sfere S_1 i središte jedne od malih sfera.

Iz trokuta AOO_1 (vidi sliku) imamo

$$(r+\rho)^2 = (R-r)^2 + (R-\rho)^2. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Odavde je $\rho = R \cdot \dfrac{R-r}{R+r}$. (2 boda)

Koristeći dobiveni izraz za r dobivamo

$$\rho = R \cdot \frac{1 - \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}}}{1 + \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}}} = \frac{R}{1+2\sin\frac{\pi}{8}}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Na kraju još izračunajmo $\sin\frac{\pi}{8}$:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Konačno je $\rho = \dfrac{R}{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$. (2 boda)

Zadatak A-3.4.

Ako su $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ svi djelitelji prirodnog broja $n > 1$, dokaži da vrijedi

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k > k\sqrt{n}.$$

Prvo rješenje.

Neka je $S = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$.

Ako je d djeljitelj broja n, onda je i $\dfrac{n}{d}$ djelitelj broja n, pa je $d_{k+1-i} = \dfrac{n}{d_i}$, (5 bodova)

Zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobivamo

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{i=1}^{k}(d_i + d_{k+1-i}) \\ &\geq 2k \sqrt[2k]{\prod_{i=1}^{k}(d_i \cdot d_{k+1-i})} && \text{(5 bodova)} \\ &= 2k \sqrt[2k]{n^k} = 2k\sqrt{n}\ . && \text{(5 bodova)} \end{aligned}$$

te stoga vrijedi $S \geq k\sqrt{n}$.

Vrijedi stroga nejednakost $S > k\sqrt{n}$, jer zbog $n > 1$ nisu svi djeljitelji d_i međusobno jednaki. (5 bodova)

Napomena: Rješenje je moguće dovršiti i primjenom A-G nejednakosti na parove djelitelja: $2S = \sum\limits_{i=1}^{k}(d_i + \dfrac{n}{d_i}) > 2\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt{d_i \cdot \dfrac{n}{d_i}} = 2\sum\limits_{i=1}^{k}\sqrt{n} = 2k\sqrt{n}$, pa je $S > k\sqrt{n}$.

Drugo rješenje.

Istu ideju rješavanja možemo provesti i bez promatranja dvostrukog zbroja $2S$, ali tada moramo posebno razmatrati slučajeve kada je k paran i kada je k neparan.

Započinjemo kao i u prethodnom rješenju. Neka je $S = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$.

Ako je d djeljitelj broja n, onda je i $\dfrac{n}{d}$ djelitelj broja n, pa je $d_{k+1-i} = \dfrac{n}{d_i}$. (5 bodova)

Za paran broj djeljitelja k imamo

$$S = \sum_{i=1}^{k/2}(d_i + d_{k+1-i}) \geq k \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k/2}(d_i \cdot d_{k+1-i})} = k\sqrt[k]{n^{k/2}} = k\sqrt{n}\ . \qquad \text{(5 bodova)}$$

Vrijedi stroga nejednakost $S > k\sqrt{n}$, jer zbog $n > 1$ nisu svi djeljitelji d_i međusobno jednaki. (5 bodova)

Razmotrimo slučaj kada je broj djeljitelja k neparan.

Broj djeljitelja je neparan ako i samo ako je n potpun kvadrat, a to znači da je jedan od njegovih djelitelja $d_{\frac{k+1}{2}} = \sqrt{n}$, a ostali se djelitelji mogu podijeliti u parove d_i, d_{k+1-i}, $i = 1, \ldots, \frac{k-1}{2}$ takve da je $d_i \cdot d_{k+1-i} = n$.

Sada, za neparan k, vrijedi

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{n} + \sum_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (d_i + d_{k+1-i}) \\ &\geq \sqrt{n} + (k-1)\sqrt[k-1]{\prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}} (d_i \cdot d_{k+1-i})} \\ &= \sqrt{n} + (k-1)\sqrt[k-1]{n^{\frac{k-1}{2}}} = k\sqrt{n}\ . \end{aligned}$$

(5 bodova)

Iz istih razloga kao i za paran k vrijedi stroga nejednakost.

Napomena: I ovo je rješenje je moguće dovršiti i primjenom A-G nejednakosti na parove djelitelja, kako je opisano u napomeni uz prvo rješenje.

Treće rješenje.

Neka je $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i}$.

Tada je broj djeljitelja broja n jednak $k = (1+\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_i)$,

a zbroj svih djeljitelja broja n

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_k = (1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_i + \ldots + p_i^{\alpha_i}).$$

(3 boda)

Dakle, treba dokazati

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_i + \ldots + p_i^{\alpha_i}) > (1+\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (1+\alpha_i) \cdot \sqrt{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i}} \tag{*}$$

Primjenom A-G nejednakosti dobivamo

$$\frac{1 + p + \ldots + p^{\alpha}}{\alpha + 1} \geq \sqrt[\alpha+1]{p^{1+2+\ldots+\alpha}}$$

(5 bodova)

odnosno

$$1 + p + \ldots + p^{\alpha} \geq (\alpha+1)\sqrt[\alpha+1]{p^{\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)}{2}}} = (\alpha+1)\sqrt{p^{\alpha}}\ .$$

(4 boda)

Zbog $p > 1$ vrijedi i stroga nejednakost

$$1 + p + \ldots + p^{\alpha} > (1+\alpha)\sqrt{p^{\alpha}}\ .$$

(5 bodova)

Primijenimo gornju nejednakost uvrštavajući redom $p_1, \ldots, p_i$ na mjesto p i pomnožimo sve te nejednakosti. Time dobivamo (*). (3 boda)

Zadatak A-3.5.

Kvadratna tablica 2009×2009 popunjena je brojevima $1, 2, 3, \ldots, 2009$ tako da se u svakom retku i svakom stupcu pojavljuje svaki od tih brojeva. Ako je tablica simetrična u odnosu na jednu dijagonalu, onda se i na toj dijagonali pojavljuju svi brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2009$. Dokaži!

Rješenje.

Uočimo da se, zbog uvjeta zadatka, svaki od brojeva $1, 2, \ldots, 2009$ pojavljuje u tablici točno 2009 puta. (2 boda)

Zbog simetričnosti, svaki broj se pojavljuje jednako mnogo puta ispod i iznad uočene dijagonale, pa je broj pojavljivanja pojedinog broja izvan te dijagonale paran. (10 bodova)

Stoga se svaki broj mora na promatranoj dijagonali pojaviti neparni broj puta. (3 boda)

Zaključujemo da se svaki broj mora pojaviti na toj dijagonali bar jednom, (3 boda)

a kako je brojeva jednako koliko i mjesta na dijagonali, svaki se od brojeva $1, 2, \ldots, 2009$ na njoj pojavljuje točno jednom. (2 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

23. veljače 2009.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Dan je niz (a_n),

$$a_1 = 1, \qquad a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1}, \text{ za } n \geq 2.$$

Izrazi opći član niza a_n pomoću n.

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3a_1 + 2 \\ a_3 &= 3a_2 + 2^2 \\ &\dots \\ a_{n-1} &= 3a_{n-2} + 2^{n-2} \\ a_n &= 3a_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

(2 boda)

Pomnožimo prvu jednakost s 3^{n-1}, drugu s 3^{n-2}, treću s 3^{n-3},..., predzadnju s 3,

$$\begin{aligned} 3^{n-1}a_1 &= 3^{n-1} \\ 3^{n-2}a_2 &= 3^{n-1}a_1 + 2 \cdot 3^{n-2} \\ 3^{n-3}a_3 &= 3^{n-2}a_2 + 2^2 \cdot 3^{n-3} \\ &\dots \\ 3a_{n-1} &= 3^2 a_{n-2} + 2^{n-2} \cdot 3 \\ a_n &= 3a_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

te ih sve zbrojimo. Dobivamo:

$$a_n = 3^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-2} + 2^2 \cdot 3^{n-3} + \ldots + 2^{n-1}$$ (10 bodova)

$$= 3^{n-1} + \frac{2}{3} \cdot 3^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3^{n-1} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 3^{n-1}$$

$$= 3^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3^n - 2^n.$$ (8 bodova)

Dakle, $a_n = 3^n - 2^n$.

Drugo rješenje.

Zadatak se može riješiti i matematičkom indukcijom, ukoliko se formula za opći član uspije naslutiti.

Izračunajmo nekoliko prvih članova niza:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 3a_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5 \\
a_3 &= 3a_2 + 2^2 = 3 \cdot 5 + 4 = 19 \\
a_4 &= 3a_3 + 2^3 = 3 \cdot 19 + 8 = 65 \\
& \ldots
\end{aligned}$$

Uočimo da je $\quad a_1 = 3 - 2, \quad a_2 = 9 - 4, \quad a_3 = 27 - 8, \quad a_4 = 81 - 16.$

Stoga naslućujemo da vrijedi $a_n = 3^n - 2^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. (5 bodova)
To ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza indukcije vrijedi.

Pretpostavimo da je za neki prirodan broj k, $a_k = 3^k - 2^k$.

Tada je

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= (\text{prema danoj rekurziji}) = 3 \cdot a_k + 2^k \\
&= (\text{prema pretpostavci}) = 3 \cdot (3^k - 2^k) + 2^k \\
&= 3 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k + 2^k = 3^{k+1} - 2^{k+1}.
\end{aligned}$$

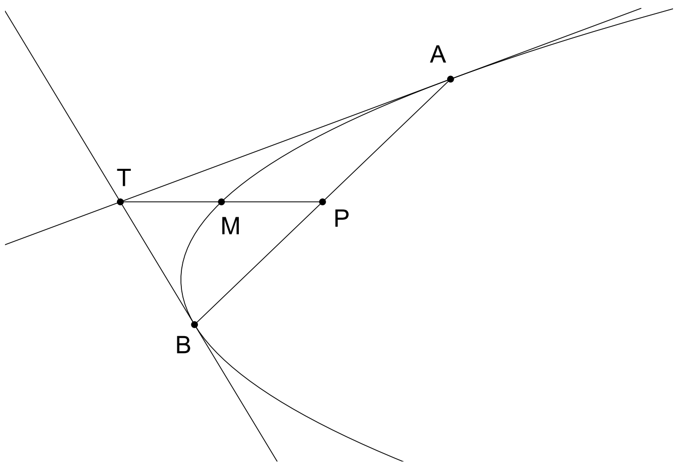
Dakle, ako je $a_k = 3^k - 2^k$, onda je $a_{k+1} = 3^{k+1} - 2^{k+1}$.

Sada prema principu matematičke indukcije zaključujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n = 3^n - 2^n$, što smo i htjeli pokazati. (15 bodova)

Zadatak A-4.2.

Točka P je polovište tetive parabole $\mathcal{P}$ u čijim su krajevima povučene tangente na tu parabolu. Neka je T sjecište tih tangenata. Dokaži da polovište dužine $\overline{PT}$ leži na paraboli.

Prvo rješenje.



Neka parabola ima jednadžbu $y^2 = 2px$, i neka je promatrana tetiva $\overline{AB}$.

Tangente parabole u točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ imaju jednadžbe

$$y = \frac{p}{y_1}x + \frac{px_1}{y_1}, \qquad y = \frac{p}{y_2}x + \frac{px_2}{y_2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Koordinate točke T dobit ćemo rješavajući taj sustav dviju jednadžbi.

Iz $\left(\frac{p}{y_1} - \frac{p}{y_2}\right) x = p\left(\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_1}{y_1}\right)$

dobivamo apscisu $x = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1}$. (3 boda)

Pripadna ordinata je $y = \frac{p}{y_1} \cdot \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1} + \frac{px_1}{y_1}$,

odnosno $y = \frac{p(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1}$. (3 boda)

Nadalje, budući da je $y_1^2 = 2px_1$ i $y_2^2 = 2px_2$, vrijedi $y = \frac{\frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_1^2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$

pa imamo $T\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. (3 boda)

Polovište tetive $\overline{AB}$ je $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. (1 bod)

Računamo koordinate polovišta $M(x_m, y_m)$ dužine $\overline{PT}$:

$$\begin{aligned}
x_m &= \frac{\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_2 - y_1} + \dfrac{x_1 + x_2}{2}}{2} \\
&= \frac{x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2 - x_1y_1}{4(y_2 - y_1)} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{4(y_2 - y_1)}.
\end{aligned}$$

Odmah se vidi da je $y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$. (4 boda)

Konačno imamo:

$$\begin{aligned}
2\,p\,x_m &= \frac{(2px_2 - 2px_1)(y_1 + y_2)}{4(y_2 - y_1)} \\
&= \frac{(y_2^2 - y_1^2)(y_1 + y_2)}{4(y_2 - y_1)} = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = {y_m}^2
\end{aligned}$$

što znači da točka $M(x_m, y_m)$ leži na paraboli. (4 boda)

Drugo rješenje.

Neka je $T(x_0, y_0)$. Ostale oznake kao u prvom rješenju.

Koordinate polovišta P tetive $\overline{AB}$ su $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$. (1 bod)

Polara $yy_0 = p(x + x_0)$ točke T (u odnosu na promatranu parabolu) je pravac AB, pa koordinate (x_1, y_1), (x_2, y_2) točaka A, B, zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} yy_0 = p(x + x_0) \\ y^2 = 2px \end{cases}$$ (2 boda)

te stoga i jednadžbu $y^2 = 2p\left(\dfrac{yy_0}{p} - x_0\right)$, tj. $y^2 = 2yy_0 - 2px_0$. (1 bod)

To je kvadratna jednadžba po y, pa vrijedi $y_1 + y_2 = 2y_0$. (2 boda)

Zaključujemo da je ordinata točke P jednaka y_0, dakle ordinati točke T. (3 boda)

Apscisa točke P dobije se iz uvjeta da P leži na polari, $x_p = \dfrac{y_py_0}{p} - x_0 = \dfrac{y_0^2}{p} - x_0$,
(3 boda)

pa je $P\left(\dfrac{y_0^2}{p} - x_0, y_0\right)$.

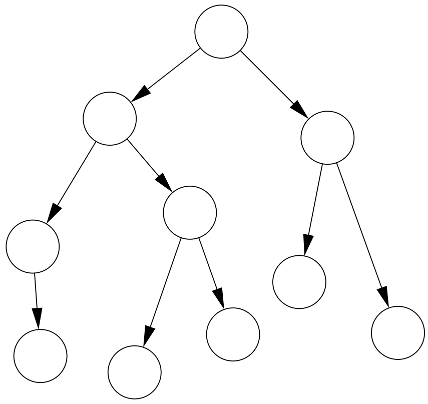
Polovište dužine $\overline{PT}$ je točka $M\left(\dfrac{x_0 + x_p}{2}, \dfrac{y_0 + y_p}{2}\right)$, tj. $M\left(\dfrac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$. (4 boda)

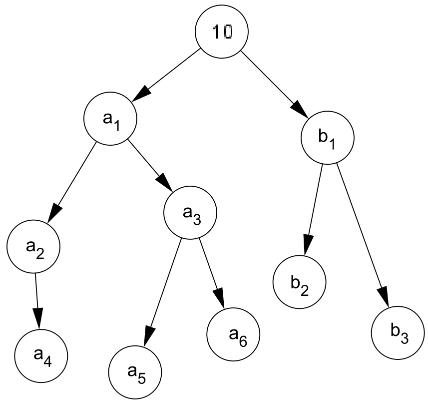
Sada nije teško provjeriti da ona leži na paraboli, jer $2 \cdot p \cdot \dfrac{y_0^2}{2p} = y_0^2$. (4 boda)

(Alternativno, može se odrediti sjecište pravca PT s parabolom i provjeriti da je ta točka polovište od $\overline{PT}$.)

Zadatak A-4.3.

Na koliko načina možemo upisati brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u kružiće na slici tako da svaka strelica pokazuje od većeg broja prema manjem ?





Rješenje.

Broj u gornjem kružiću očito mora biti 10. (1 bod)

Označimo preostale kružiće, odnosno brojeve u njima, s $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3$ kao na slici.

Preostalih 9 brojeva možemo podijeliti u skupove $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ i $\{b_1, b_2, b_3\}$ na $\binom{9}{3} = 84$ načina. (4 boda)

Unutar odabranog skupa $\{b_1, b_2, b_3\}$, b_1 mora biti najveći, (1 bod)
dok b_2 i b_3 možemo odabrati na 2 načina. (1 bod)

Unutar skupa $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, a_1 mora biti najveći, (1 bod)

a iz skupa $\{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ možemo odabrati $\{a_2, a_4\}$ na $\binom{5}{2} = 10$ načina. (3 boda)

Mora biti $a_2 > a_4$, (1 bod)
a od preostalih brojeva $\{a_3, a_5, a_6\}$ najveći je a_3. (1 bod)

Konačno, a_5 i a_6 možemo odabrati na 2 načina. (1 bod)

Ukupan broj načina je umnožak (4 boda)

$$84 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 = 3360. \qquad (2 \text{ boda})$$

Zadatak A-4.4.

Neka je a prirodni broj veći od 1. Dokaži da je broj

$$n(2n+1)(3n+1)\dots(an+1)$$

djeljiv sa svim prostim brojevima manjim od a, za svaki prirodan broj n.

Rješenje.

Neka je $p < a$ prost broj. Ako je n djeljiv s p, tvrdnja vrijedi. (2 boda)

Neka n nije djeljiv s p. Tada brojevi $2n+1$, $3n+1, \dots, (p+1)n+1$ daju različite ostatke r_1, $r_2, \dots, r_p$ (redom) pri dijeljenju s p. (5 bodova)

Zaista, kada bi bilo $r_i = r_j$ za $i, i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $i \neq j$, onda bi broj

$$((i+1)n+1) - ((j+1)n+1) = (i-j)n$$

bio djeljiv sa p. Kako p ne dijeli n, broj $i-j$ morao bi biti djeljiv s p, što je nemoguće jer je $1 \leq |i-j| < p$. (8 bodova)

Kako imamo p različitih ostataka, jedan od njih je jednak nuli, a odgovarajući faktor promatranog produkta djeljiv s p. (5 bodova)

Zadatak A-4.5.

Prvih 2010 prirodnih brojeva napisano je u nizu bilo kojim redom, a zatim je svakom od njih pribrojen njegov redni broj u tom nizu. Dokaži da među tako dobivenim zbrojevima postoje dva čija je razlika djeljiva s 2010.

Rješenje.

Pretpostavimo da dobiveni zbrojevi s_1, $s_2, \dots$, s_{2010} pri dijeljenju s 2010 svi daju različite ostatke r_1, $r_2, \dots$, r_{2010}. Ti su ostaci brojevi 0, 1, 2,..., 2009 (u nekom poretku) pa je zbroj svih ostataka jednak

$$R = 0+1+2+\dots+2009 = \frac{2010 \cdot 2009}{2} = 1005 \cdot 2009. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Zbroj promatranih zbrojeva je

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_{2010} = 2 \cdot \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 2010 \cdot 2011. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Naravno, razlika svakog od brojeva s_k i njegovog ostatka pri dijeljenju s 2010, r_k, je djeljiva s 2010, pa bi i zbroj tih razlika

$$\sum_{k=1}^{2010}(s_k - r_k) = \sum_{k=1}^{2010} s_k - \sum_{k=1}^{2010} r_k = S - R$$

trebao biti djeljiv s 2010. (5 bodova)

No, razlika $S-R = 2010 \cdot 2011 - 1005 \cdot 2009$ nije djeljiva s 2010, pa smo dobili kontradikciju.

Pretpostavka da su svi ostaci r_1, $r_2, \dots$, r_{2010} različiti je pogrešna, dakle postoje dva jednaka ostatka r_i, r_j, odnosno dva zbroja s_i i s_j čija je razlika djeljiva s 2010.

(5 bodova)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Odredi sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata jednak nekom četveroznamenkastom broju kojem su sve znamenke jednake.

2. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Neka pravac koji prolazi kroz polovišta dijagonala četverokuta siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom u točkama M i N. Dokaži da trokuti ABN i CDM imaju jednake površine.

3. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi, takvi da je $xyz = 1$. Dokaži da vrijedi
$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geq 2.$$

4. Dan je pravilni deveterokut sa stranicom duljine a. Kolika je razlika duljina njegove najdulje i najkraće dijagonale?

5. Dva igrača, A i B igraju sljedeću igru: A i B zapisuju naizmjenično po jednu znamenku sve dok ne napišu šesteroznamenkasti broj, pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Igrač A igra prvi, a znamenke se pišu redom s lijeva na desno. Igrač A pobjeđuje ako je napisani šesteroznamenkasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, a u suprotnom pobjeđuje igrač B. Dokaži da igrač A ima strategiju za pobjedu, tj. može pobijediti neovisno o igri igrača B.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je $a^2 + 2b$ kvadrat cijelog broja. Dokaži da se broj $a^2 + b$ može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

2. Dan je četverokut $ABCD$. Opisana kružnica trokuta ABC siječe stranice $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ redom u točkama P i Q, a opisana kružnica trokuta CDA stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama R i S. Pravci BP i BQ sijeku pravac RS redom u točkama M i N. Dokaži da točke M, N, P i Q leže na istoj kružnici.

3. Nađi sve parove kompleksnih brojeva (w, z), $w \neq z$, koji zadovoljavaju sustav jednadžbi
$$w^5 + w = z^5 + z,$$
$$w^5 + w^2 = z^5 + z^2.$$

4. Odredi najveću vrijednost realne konstante λ takve da za sve pozitivne realne brojeve u, v, w za koje je $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$ vrijedi nejednakost $u + v + w \geq \lambda$.

5. U svako polje tablice $m \times n$ (m, $n \in \mathbb{N}$) upisano je slovo A ili B. Pritom nikoja dva susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) ne sadrže isto slovo. U jednom koraku biraju se dva susjedna polja, i oba slova na tim poljima zamijene se novim slovima po sljedećem pravilu:
   - umjesto slova A upisuje se slovo B,
   - umjesto slova B upisuje se slovo C,
   - umjesto slova C upisuje se slovo A.

   Za koje m i n nakon konačno mnogo koraka možemo postići da u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo A sada piše slovo B, a u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo B sada piše slovo A?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $6^m + 2^n + 2$ potpun kvadrat.

2. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AC| > |BC|$. Izrazi površinu trokuta određenog stranicom $\overline{AB}$, simetralom stranice $\overline{AB}$ i simetralom kuta $\sphericalangle ACB$ pomoću duljina stranica trokuta ABC.

3. Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a, b i c i neka je P točka u njegovoj unutrašnjosti. Neka pravac AP ponovno siječe kružnicu opisanu trokutu BCP u točki A' i neka su B' i C' točke definirane analogno. Dokaži da za opseg O šesterokuta $AB'CA'BC'$ vrijedi
$$O \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}.$$
Dokaži da za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m.

5. U jednom vrhu kocke nalaze se dva pauka, a u suprotnom vrhu muha. Pauci i muha kreću se isključivo po bridovima kocke jednakim konstantnim brzinama. U svakom trenutku paucima je poznata pozicija muhe i muhi je poznata pozicija pauka. Dokaži da pauci mogu uhvatiti muhu. Smatra se da je muha uhvaćena ako se nađe u istoj točki kao i jedan od paukova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.

2. Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

3. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} \bigl(2xy - f(y)\bigr)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n), $m, n > 1$, za koje je $n^3 - 1$ djeljivo s $mn - 1$.

5. Unutar kvadrata stranice duljine 38 smješteno je 100 konveksnih mnogokuta, pri čemu je površina svakog od njih najviše π, a opseg najviše 2π. Dokaži da unutar tog kvadrata postoji krug polumjera 1 koji ne siječe niti jedan od danih 100 mnogokuta.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-1.1.

Odredi sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata jednak nekom četveroznamenkastom broju kojem su sve znamenke jednake.

Rješenje.

Tražimo prirodan broj k i znamenku $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ takve da vrijedi:

$$\begin{aligned}(2k-1)^2 + (2k+1)^2 + (2k+3)^2 &= \overline{xxxx} \\ 12k^2 + 12k + 11 &= 1111x \\ 12(k^2 + k) + 11 &= 12 \cdot 92x + 7x.\end{aligned}$$

Slijedi da je $7x - 11$ djeljivo s 12.

Stoga x mora biti neparan.

Za $x \in \{1, 3, 7, 9\}$, $7x - 11$ nije djeljivo s 12.

Za $x = 5$ imamo $7 \cdot 5 - 11 = 24 = 2 \cdot 12$. Tada je:

$$\begin{aligned}12k^2 + 12k + 11 &= 5555 \\ 12k^2 + 12k &= 5544 \ / : 12 \\ k^2 + k = k(k+1) &= 462 = 21 \cdot 22.\end{aligned}$$

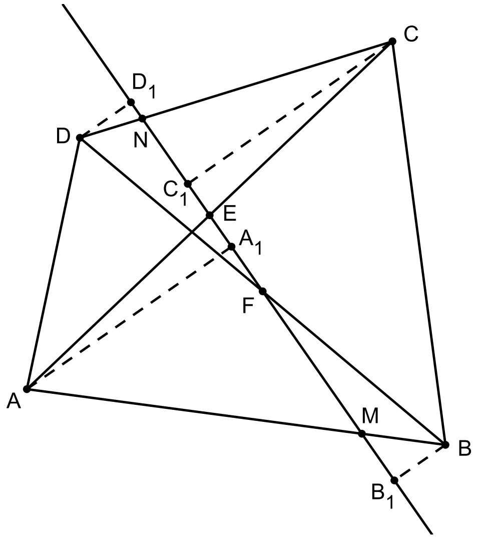
Dakle, $k = 21$, a traženi brojevi su 41, 43 i 45.

Zadatak A-1.2.

Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Neka pravac koji prolazi kroz polovišta dijagonala četverokuta siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom u točkama M i N. Dokaži da trokuti ABN i CDM imaju jednake površine.

Rješenje.

Neka su E i F redom polovišta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Nadalje, neka su A_1, B_1, C_1, D_1 redom nožišta okomica iz vrhova A, B, C, D na pravac EF.



Zbog $\sphericalangle AEA_1 = \sphericalangle CEC_1$ (vršni kutevi) i $|AE| = |EC|$, vrijedi da su pravokutni trokuti AA_1E i CC_1E sukladni. Zbog toga je $|AA_1| = |CC_1|$.

Analogno, trokuti BB_1F i DD_1F su sukladni i vrijedi $|BB_1| = |DD_1|$.

Vrijedi

$$\begin{aligned} P(ABN) &= P(AMN) + P(MBN) \\ &= \frac{|MN| \cdot |AA_1|}{2} + \frac{|MN| \cdot |BB_1|}{2} \\ &= \frac{1}{2}|MN|\big(|AA_1| + |BB_1|\big) \end{aligned}$$

i slično:

$$\begin{aligned} P(CDM) &= P(CMN) + P(MDN) \\ &= \frac{|MN| \cdot |CC_1|}{2} + \frac{|MN| \cdot |DD_1|}{2} \\ &= \frac{1}{2}|MN|\big(|CC_1| + |DD_1|\big). \end{aligned}$$

Dakle,

$$P(ABN) = \frac{1}{2}|MN|\big(|AA_1| + |BB_1|\big) = \frac{1}{2}|MN|\big(|CC_1| + |DD_1|\big) = P(CDM).$$

Zadatak A-1.3.

Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi, takvi da je $xyz = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \geq 2.$$

Rješenje.

Najprije uočimo da

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(x^2-xy+y^2\right) \geq x^2+xy+y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-y)^2 \geq 0,$$

pa je $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} = \dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \cdot (x+y) \geq \dfrac{1}{3}(x+y).$

Zato vrijedi

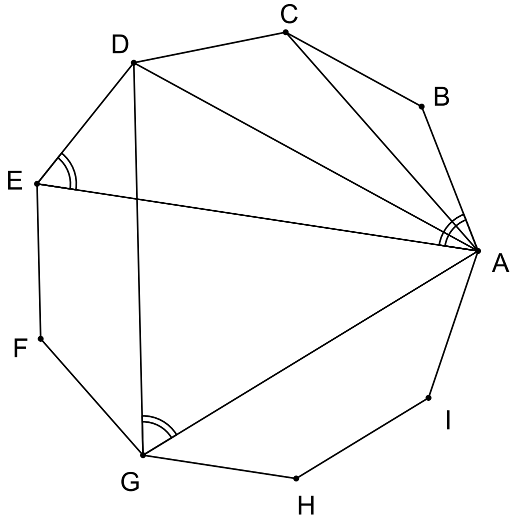
$$\begin{aligned}&\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\\ &\qquad \geq \frac{1}{3}(x+y)+\frac{1}{3}(y+z)+\frac{1}{3}(z+x)=\frac{2}{3}(x+y+z)\end{aligned}$$

Konačno, zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine i zbog uvjeta zadatka vrijedi $\dfrac{2}{3}(x+y+z) \geq 2\sqrt[3]{xyz} = 2\sqrt[3]{1} = 2$, čime je nejednakost dokazana.

Zadatak A-1.4.

Dan je pravilni deveterokut sa stranicom duljine a. Kolika je razlika duljina njegove najdulje i najkraće dijagonale?

Rješenje.



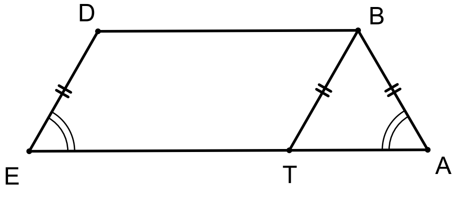
Bez smanjenja općenitosti, gledamo dužine iz vrha A. Duljina najdulje dijagonale je $|AE|$, a najkraće $|AC|$ i traži se $|AE| - |AC|$.

Primijetimo da su trokuti ADG i BEH jednakostranični. Zato, i zbog jednakosti kuteva nad istim lukom deveterokutu opisane kružnice, vrijedi:

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle AGD = 60^\circ \quad \text{i} \quad \sphericalangle EAB = \sphericalangle EHB = 60^\circ.$$

Prema tome, četverokut $ABDE$ je jednakokračan trapez.

Povucimo kroz vrh B pravac paralelan s $\overline{DE}$. Neka je T njegovo sjecište s $\overline{AE}$.



Četverokut $TEDB$ je paralelogram i vrijedi

$$|AE| - |AC| = |AE| - |BD| = |AE| - |TE| = |AT|.$$

Primijetimo da je trokut ABT jednakostraničan pa vrijedi:

$$|AE| - |AC| = |AT| = |AB| = a.$$

Zadatak A-1.5.

Dva igrača, A i B igraju sljedeću igru: A i B zapisuju naizmjenično po jednu znamenku sve dok ne napišu šesteroznamenkasti broj, pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Igrač A igra prvi, a znamenke se pišu redom s lijeva na desno. Igrač A pobjeđuje ako je napisani šesteroznamenkasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, a u suprotnom pobjeđuje igrač B. Dokaži da igrač A ima strategiju za pobjedu, tj. može pobijediti neovisno o igri igrača B.

Rješenje.

Neka su a_1, a_2, a_3 znamenke koje izabire A, a b_1, b_2, b_3 znamenke koje izabire B. Dobiveni broj je $x = \overline{a_1b_1a_2b_2a_3b_3}$.

Neka je $M = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ i $N = \{1, 3, 7, 9\}$. Ako je $b_3 \in M$, broj x je djeljiv s 2 ili 5. Stoga B ne smije svoju zadnju znamenku odabrati iz skupa M.

Zato A bira svoje prve dvije znamenke iz N prisiljavajući time igrača B da svoje prve dvije znamenke bira iz M (u suprotnom bi A mogao potrošiti zadnju znamenku iz N prije zadnjeg poteza igrača B, pa bi bilo $b_3 \in M$ i A pobjeđuje).

Igrač A mora postići da broj x bude djeljiv s 3. Neka je $a_1 = 3$, $a_2 = 9$. Tada je $b_3 \equiv 1 \pmod 3$ jer iz skupa N preostaju znamenke 1 i 7.

Broj x bit će djeljiv s 3 ako je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ djeljivo s 3. Ovisno o odabiru b_1 i b_2, imamo 3 mogućnosti:

(1) $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod 3$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 + 1 \pmod 3$.

Igrač A može odabrati za a_3 jednu od znamenaka 2, 5 ili 8 (barem jedna od njih je još neiskorištena).

(2) $b_1 + b_2 \equiv 1 \pmod 3$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 + 2 \pmod 3$.

Sada A može odabrati $a_3 = 1$.

(3) $b_1 + b_2 \equiv 2 \pmod 3$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 \pmod 3$.

U ovom slučaju A bira $a_3 = 0$ ili $a_3 = 6$. Barem jedan on njih je na raspolaganju, jer da je B odabrao oba, bilo bi $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod 3$.

U svakom slučaju suma znamenaka bit će djeljiva s 3, pa će i x biti djeljiv s 3, a igrač A pobjednik.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-2.1.

Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je $a^2 + 2b$ kvadrat cijelog broja. Dokaži da se broj $a^2 + b$ može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Rješenje.

Prema uvjetu zadatka je

$$a^2 + 2b = m^2, \tag{1}$$

za neki $m \in \mathbb{Z}$. Odatle je $b = \dfrac{m^2 - a^2}{2}$ pa imamo

$$a^2 + b = a^2 + \frac{m^2 - a^2}{2} = \frac{m^2 + a^2}{2}.$$

No, vrijedi

$$\frac{m^2 + a^2}{2} = \frac{(m+a)^2 + (m-a)^2}{4} = \left(\frac{m+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-a}{2}\right)^2.$$

Još treba provjeriti da su brojevi $\dfrac{m+a}{2}$ i $\dfrac{m-a}{2}$ cijeli.

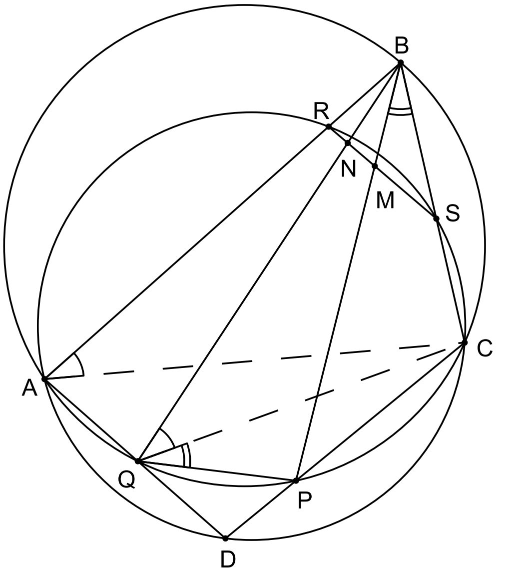
Zaista, iz relacije (1) slijedi da su brojevi m i a iste parnosti.

Zbog toga su $m + a$ i $m - a$ parni brojevi, pa su $\dfrac{m+a}{2}$ i $\dfrac{m-a}{2}$ cijeli brojevi.

Zadatak A-2.2.

Dan je četverokut $ABCD$. Opisana kružnica trokuta ABC siječe stranice $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ redom u točkama P i Q, a opisana kružnica trokuta CDA stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama R i S. Pravci BP i BQ sijeku pravac RS redom u točkama M i N. Dokaži da točke M, N, P i Q leže na istoj kružnici.

Rješenje.



Vrijede jednakosti $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle CQP = \sphericalangle CBP$ (jednakost obodnih kuteva).

Četverokut $ACSR$ je tetivan pa je $\sphericalangle RSC + \sphericalangle RAC = 180°$, a odatle slijedi
$\sphericalangle BSR = 180° - \sphericalangle RSC = \sphericalangle RAC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BQC$.

Dalje imamo:

$$\begin{aligned} 180° - \sphericalangle PMN &= 180° - \sphericalangle BMS = \sphericalangle SBM + \sphericalangle BSM \\ &= \sphericalangle CBP + \sphericalangle BSR = \sphericalangle CQP + \sphericalangle BQC = \sphericalangle BQP \\ &= \sphericalangle NQP. \end{aligned}$$

To znači da je četverokut $QPMN$ tetivan, odnosno da točke M, N, P i Q leže na istoj kružnici.

Zadatak A-2.3.

Nađi sve parove kompleksnih brojeva (w, z), $w \neq z$, koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$w^5 + w = z^5 + z,$$

$$w^5 + w^2 = z^5 + z^2.$$

Rješenje.

Oduzimanjem zadanih jednadžbi dobivamo jednadžbu

$$w - w^2 = z - z^2$$

koja je ekvivalentna jednadžbi

$$(w - z)(w + z - 1) = 0.$$

Budući da je $w - z \neq 0$, slijedi

$$w + z = 1. \tag{1}$$

Kvadriranjem te jednakosti dobivamo

$$w^2 + z^2 = 1 - 2wz, \tag{2}$$

a ponovnim kvadriranjem

$$w^4 + z^4 = 1 - 4wz + 2(wz)^2. \tag{3}$$

Prva jednadžba danog sustava ekvivalentna je jednadžbi

$$\frac{w^5 - z^5}{w - z} = -1.$$

Ona se može zapisati u obliku

$$\frac{(w - z)(w^4 + w^3 z + w^2 z^2 + wz^3 + z^4)}{w - z} = -1,$$

$$w^4 + w^3 z + w^2 z^2 + wz^3 + z^4 + 1 = 0,$$

$$w^4 + z^4 + wz(w^2 + z^2 + wz) + 1 = 0.$$

Uvrštavanjem (2) i (3) i sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$(wz)^2 - 3wz + 2 = 0,$$

rješavanjem koje slijedi da je $wz = 1$ ili $wz = 2$.

Uvrštavanjem $z = \dfrac{1}{w}$ i $z = \dfrac{2}{w}$ u (1) dobivamo kvadratne jednadžbe $w^2 - w + 1 = 0$ i $w^2 - w + 2 = 0$ odakle konačno dobivamo četiri rješenja

$$(w, z) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \right) \quad \text{i} \quad (w, z) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{7}i}{2} \right).$$

Zadatak A-2.4.

Odredi najveću vrijednost realne konstante λ takve da za sve pozitivne realne brojeve u, v, w za koje je $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$ vrijedi nejednakost $u + v + w \geq \lambda$.

Rješenje.

Tvrdimo da je najveća moguća vrijednost konstante λ jednaka $\sqrt{3}$.

Naime, lako je vidjeti da za $u = v = w = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ vrijedi $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} = 1$ i $u + v + w = \sqrt{3}$. Dakle, najveća vrijednost konstante λ je manja ili jednaka $\sqrt{3}$.

Pokazat ćemo da za $u, v, w > 0$ za koje je $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$,
vrijedi $u + v + w \geq \sqrt{3}$.

Prvi način. Iz danih uvjeta i nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$u \cdot \frac{v+w}{2} + v \cdot \frac{w+u}{2} + w \cdot \frac{u+v}{2} \geq u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1,$$

odnosno

$$uv + vw + wu \geq 1.$$

Kako vrijedi

$$(u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2 \geq 0,$$

$$u^2 + v^2 + w^2 \geq uv + vw + wu \geq 1,$$

slijedi

$$(u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu) \geq 3,$$

odnosno $u + v + w \geq \sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u = v = w = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Drugi način. Primjenom najprije aritmetičko-geometrijske, a zatim i Cauchyjeve nejednakosti imamo

$$\frac{(u+v+w)^4}{9} = \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3 \cdot 3(u+v+w) \geq 3uvw(u+v+w) =$$

$$= (uvw + vwu + wuv)(u+v+w) \geq \left(u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv}\right)^2 \geq 1.$$

Dakle, vrijedi $u + v + w \geq \sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u = v = w = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Treći način. Stavimo $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{vw}$, $z = \sqrt{wu}$. Tada zbog zadanog uvjeta vrijedi

$$xy + yz + zx = v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} + u\sqrt{vw} \geq 1.$$

Primijetimo da je $u = \dfrac{zx}{y}$, $v = \dfrac{xy}{z}$, $w = \dfrac{yz}{x}$. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$2(u+v+w) = \left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) + \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right) + \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) \geq 2x + 2y + 2z,$$

odnosno $u+v+w \geq x+y+z$. Kao u prvom rješenju, dobivamo

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geq 3(xy+yz+zx) \geq 3,$$

te konačno

$$(u+v+w)^2 \geq (x+y+z)^2 \geq 3,$$

odnosno $u+v+w \geq \sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u=v=w=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadatak A-2.5.

U svako polje tablice $m \times n$ ($m,\ n \in \mathbb{N}$) upisano je slovo A ili B. Pritom nikoja dva susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) ne sadrže isto slovo. U jednom koraku biraju se dva susjedna polja, i oba slova na tim poljima zamijene se novim slovima po sljedećem pravilu:

- umjesto slova A upisuje se slovo B,
- umjesto slova B upisuje se slovo C,
- umjesto slova C upisuje se slovo A.

Za koje m i n nakon konačno mnogo koraka možemo postići da u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo A sada piše slovo B, a u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo B sada piše slovo A?

Rješenje.

Neka se u tablici $m \times n$ u konačno mnogo koraka mogu promijeniti slova u svim poljima na traženi način. Označimo broj polja u kojima se u početku nalazilo slovo A s a, a broj polja u kojima je u početku bilo upisano slovo B s b.

Kako se u i-tom polju u kojem je na početku bilo slovo A na kraju nalazi slovo B, na njemu je provedeno $3s_i+1$ opisanih operacija (za neko $s_i \in \mathbb{N}_0$). Slično, na i-tom polju u kojem je u početku bilo slovo B provedeno je $3t_i+2$ takvih operacija (za neko $t_i \in \mathbb{N}_0$).

Budući da se u svakom paru susjednih polja nalazi jedno polje na kojem je na početku pisalo A i jedno na kojem je pisalo B, vrijedi jednakost $\displaystyle\sum_{i=1}^{a}(3s_i+1) = \sum_{i=1}^{b}(3t_i+2)$.

Odatle je $\displaystyle a-2b = 3\sum_{i=1}^{b} t_i - 3\sum_{i=1}^{a} s_i$, pa vrijedi $3 \,\big|\, (a-2b)$, tj. $3 \,\big|\, (a+b)$ odnosno $3 \,\big|\, mn$, te zaključujemo da barem jedan od brojeva m i n mora biti djeljiv s 3.

S druge strane, ako je neki od m i n djeljiv s 3, tablica $m \times n$ se može podijeliti na dijelove 1×3 (ili 3×1). U njima se mogu provesti tražene operacije, npr. ovako:

$$\underline{A\,B}\,A \to B\,\underline{C\,A} \to B\,A\,B,$$

$$\underline{B\,A}\,B \to C\,\underline{B\,B} \to \underline{C\,C}\,C \to A\,\underline{A\,C} \to A\,B\,A.$$

Stoga se opisana zamjena slova može provesti i u tablici $m \times n$ koja je sastavljena od dijelova dimenzija 1×3.

Dakle, nužan i dovoljan uvjet da se ispuni zahtjev iz zadatka u tablici $m \times n$ jest da je barem jedan od brojeva m i n djeljiv s 3.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $6^m + 2^n + 2$ potpun kvadrat.

Rješenje.

Broj $6^m + 2^n + 2 = 2(3^m \cdot 2^{m-1} + 2^{n-1} + 1)$ je paran. Da bi bio potpun kvadrat, izraz u zagradi mora biti paran, odnosno točno jedan od brojeva 2^{m-1}, 2^{n-1} mora biti neparan. To znači da je jedan od brojeva m i n jednak 1, a drugi veći od 1.

Prvi slučaj. $m = 1$.
Tražimo prirodne brojeve n za koje je $6^1 + 2^n + 2 = 2^n + 8$ potpun kvadrat.
Kako je $2^n + 8 = 4(2^{n-2} + 2)$, zaključujemo da i $2^{n-2} + 2$ mora biti potpun kvadrat.
Ako je $n \geq 4$, onda je $2^{n-2} + 2$ paran broj koji nije djeljiv s 4, pa nije potpun kvadrat.
Preostaje ispitati slučajeve $n = 2, 3$. Samo za $n = 3$ taj je broj potpun kvadrat.

Drugi slučaj. $n = 1$.
Kako broj $6^m + 2^1 + 2 \equiv (-1)^m + 4 \pmod 7$ daje ostatak 3 ili 5 pri dijeljenju sa 7, on ne može biti potpun kvadrat, jer potpun kvadrat pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 0, 1, 2 ili 4.

Dakle, jedino rješenje je $(m, n) = (1, 3)$.

Drugi način. Drugi slučaj može se riješiti i promatrajući ostatke modulo 4:

Pretpostavimo da postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $6^m + 4 = x^2$. Tada je $6^m = (x-2)(x+2)$. Brojevi $x - 2$ i $x + 2$ se razlikuju za 4, pa daju isti ostatak pri dijeljenju s 4. Njihov umnožak je $2^m \cdot 3^m$. Njihova najveća zajednička mjera $M(x-2, x+2) = M(x-2, 4)$ može biti samo 1, 2 ili 4.

Ako je mjera jednaka 1, dobivamo $x - 2 = 2^m$, $x + 2 = 3^m$. Ovo je nemoguće jer je 2^m paran, a 3^m neparan broj.

Ako je mjera jednaka 2, oba broja moraju dati ostatak 2 pri dijeljenju s 4. To znači da je $m = 2$, no tada $x^2 = 6^2 + 4 = 40$ nije potpun kvadrat.

Ako je mjera jednaka 4, dobivamo $x-2 = 2^{m-2}$, $x+2 = 4 \cdot 3^m$. No, očito je $2^{m-2} + 4 < 3^m$, pa ni u ovom slučaju nema rješenja.

Zadatak A-3.2.

Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AC| > |BC|$. Izrazi površinu trokuta određenog stranicom $\overline{AB}$, simetralom stranice $\overline{AB}$ i simetralom kuta $\sphericalangle ACB$ pomoću duljina stranica trokuta ABC.

Rješenje.

Označimo duljine stranica i mjere kuteva trokuta ABC standardno a, b, c, α, β, γ.

Neka je točka P polovište stranice $\overline{AB}$, točka D sjecište navedenih simetrala, a točka E sjecište simetrale $\sphericalangle ACB$ i stranice $\overline{AB}$. Potrebno je pomoću a, b i c izraziti površinu trokuta DEP. Budući da je DEP pravokutan trokut s katetama $\overline{PD}$ i $\overline{PE}$ vrijedi

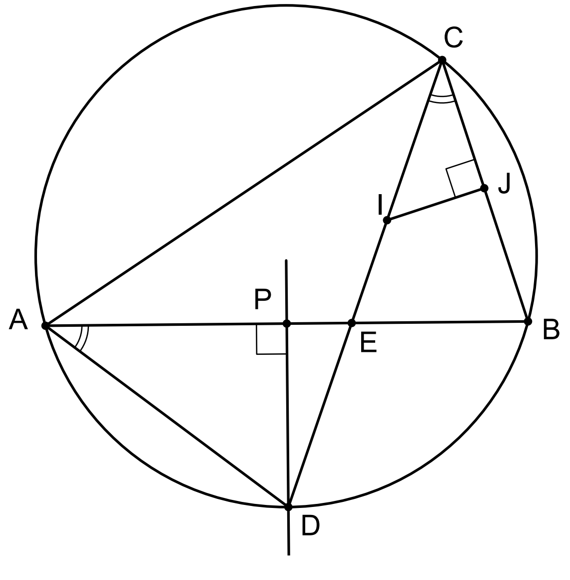
$$P(DEP) = \frac{|PD| \cdot |PE|}{2}. \tag{1}$$

Prema poučku o simetrali kuta vrijedi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{|BE|}{|AE|}$, pa zbog $|AE| + |BE| = c$

dobivamo $|BE| = \dfrac{ca}{a+b}$.

Kako je P polovište stranice $\overline{AB}$ slijedi

$$|PE| = |PB| - |EB| = \frac{c}{2} - \frac{ca}{a+b} = \frac{c(b-a)}{2(a+b)}. \tag{2}$$



Primijetimo da i simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ i simetrala stranice $\overline{AB}$ raspolavljaju luk $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokutu ABC iz čega zaključujemo da je upravo točka D polovište tog luka, to jest D leži na kružnici opisanoj trokutu ABC. Prema poučku o obodnom kutu primijenjenom na kuteve nad tetivom $\overline{DB}$ slijedi

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}.$$

Sada iz pravokutnog trokuta PAD zaključujemo da je

$$|PD| = |AP| \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \tag{3}$$

Preostaje izraziti $\operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2}$ pomoću a, b, c.

Neka je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg, I središte upisane kružnice trokutu ABC te J projekcija točke I na stranicu $\overline{BC}$. Tada je $|CJ| = \dfrac{a+b-c}{2} = s - c$, pa iz trokuta CIJ zaključujemo da je $\operatorname{tg} \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{s-c}$.

Izjednačavanjem izraza za površinu trokuta

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = P(ABC) = r \cdot s$$

slijedi

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

pa je

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \tag{4}$$

Alternativno,

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}} = \sqrt{\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab + a^2 + b^2 - c^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 - c^2}}\,.$$

Sada iz (1), (2), (3) i (4) slijedi

$$\begin{aligned} P(DEP) &= \frac{1}{2} \cdot |PE| \cdot |PD| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{c(b-a)}{2(a+b)} \cdot \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{c(b-a)}{2(a+b)} \cdot \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \\ &= \frac{c^2(b-a)}{8(a+b)} \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{(a+b+c)(a+b-c)}}\,. \end{aligned}$$

Zadatak A-3.3.

Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a, b i c i neka je P točka u njegovoj unutrašnjosti. Neka pravac AP ponovno siječe kružnicu opisanu trokutu BCP u točki A' i neka su B' i C' točke definirane analogno. Dokaži da za opseg O šesterokuta $AB'CA'BC'$ vrijedi

$$O \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

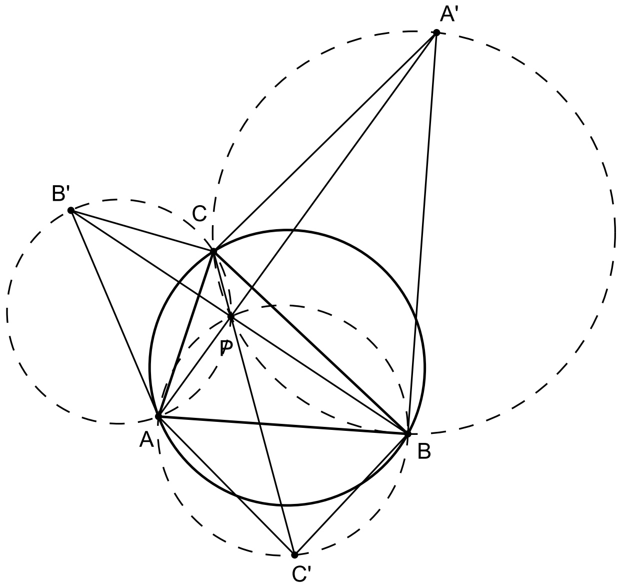
Rješenje.

Prvi način. Vrijedi

$$\sphericalangle BCA' = \sphericalangle BC'A = \sphericalangle ACB' \;,$$

$$\sphericalangle CAB' = \sphericalangle CA'B = \sphericalangle BAC' \;,$$

$$\sphericalangle ABC' = \sphericalangle AB'C = \sphericalangle CBA' \;.$$



Na primjer:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BCA' &= \sphericalangle BPA' && \text{(obodni kutevi nad lukom } BA'\text{)} \\ &= 180^\circ - \sphericalangle APB && (A,\ P,\ A' \text{ su kolinearne}) \\ &= \sphericalangle AC'B && \text{(četverokut } APBC' \text{ je tetivni)} \end{aligned}$$

Stoga su trokuti $A'BC$, $AB'C$ i ABC' slični, pa vrijedi

$$|BC| : |CA'| : |A'B| = |B'C| : |CA| : |AB'| = |BC'| : |C'A| : |AB|.$$

Zato vrijedi $\sqrt{ab} = \sqrt{|BC| \cdot |AC|} = \sqrt{|B'C| \cdot |CA'|} \leq \dfrac{1}{2}(|B'C| + |CA'|)$,

odnosno $2\sqrt{ab} \leq |B'C| + |CA'|$

i analogno $2\sqrt{bc} \leq |C'A| + |AB'|$, $2\sqrt{ca} \leq |A'B| + |BC'|$.

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right) \leq |AC'|+|C'B|+|BA'|+|A'C|+|CB'|+|B'A|,$$

što je i trebalo dokazati.

Drugi način. Neka je $x = \sphericalangle BPC$, $y = \sphericalangle CPA$ i $z = \sphericalangle APB$.

Slično kao u prvom rješenju pokaže se da kutevi u trokutu $A'CB$ iznose $\pi - x$, $\pi - z$, $\pi - y$ pa prema poučku o sinusima vrijedi

$$|A'B| = \frac{a \sin z}{\sin x}, \quad |A'C| = \frac{a \sin y}{\sin x}.$$

Prema tome je opseg trokuta $A'CB$ jednak

$$\frac{a(\sin x + \sin y + \sin z)}{\sin x}.$$

Potpuno analogno možemo odrediti opsege trokuta $B'AC$ i $C'BA$.

Zbrajanjem dobivamo

$$O + a + b + c = (\sin x + \sin y + \sin z)\left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin y} + \frac{c}{\sin z}\right).$$

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti dobivamo

$$(\sin x + \sin y + \sin z)\left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin y} + \frac{c}{\sin z}\right) \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2,$$

pa slijedi

$$O \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 - (a+b+c) = 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right).$$

Zadatak A-3.4.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Dokaži da za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m.

Rješenje.

Dokažimo najprije da vrijedi tvrdnja za $m = n$, tj. da je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n. \tag{1}$$

Pretpostavimo suprotno, da je $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < n$.

Neka je G geometrijska sredina brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Zbog aritmetičko-geometrijske nejednakosti i zbog pretpostavke vrijedi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \frac{n}{n} = 1,$$

Dakle $G < 1$. Također, iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti slijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{1}{a_2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(a_1 a_2 \cdots a_n)^2}}$$

pa je $\dfrac{1}{G^2} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \dfrac{n}{n} = 1$, odnosno $G > 1$. Zbog dobivene kontradikcije zaključujemo da je naša pretpostavka pogrešna. Time je dokazana tvrdnja (1).

Dokažimo sada da za svaki $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m.

Pretpostavimo suprotno, da je za neki m zbroj bilo kojih m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ manji od m. Posebno

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m < m,$$

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{m+1} < m,$$

$$\vdots$$

$$a_n + a_1 + \ldots + a_{m-1} < m,$$

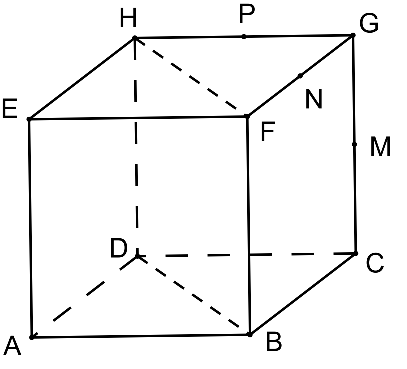
pa zbrajanjem dobivamo $m(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) < nm$, odnosno $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < n$. No, to je u kontradikciji s dokazanom tvrdnjom (1).

Zadatak A-3.5.

U jednom vrhu kocke nalaze se dva pauka, a u suprotnom vrhu muha. Pauci i muha kreću se isključivo po bridovima kocke jednakim konstantnim brzinama. U svakom trenutku paucima je poznata pozicija muhe i muhi je poznata pozicija pauka. Dokaži da pauci mogu uhvatiti muhu. Smatra se da je muha uhvaćena ako se nađe u istoj točki kao i jedan od paukova.

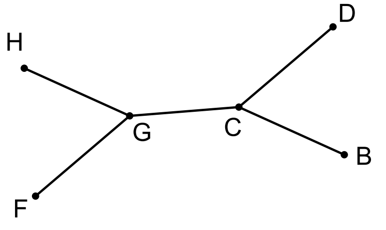
Rješenje.

Označimo vrhove kocke s A, B, C, D, E, F, G, H i neka se pauci nalaze u vrhu A, a muha u vrhu G.



Strategija za pauke je sljedeća: prvi pauk kreće se simetrično muhi u odnosu na središte kocke sve dok ona (eventualno) ne stigne do polovišta nekog od bridova $\overline{GC}$, $\overline{GF}$, $\overline{GH}$. Označimo ta polovišta M, N, P redom.

Ukoliko muha stigne u neku od tih točaka, npr. u točku M, prvi pauk nastavlja kretanje simetrično muhi u odnosu na ravninu $BDHF$ (odnosno $BCHE$ ili $CDEF$ ako je muha stigla u N ili P). Taj će pauk uhvatiti muhu ako ona stigne u neku od točaka B, D, F, H. Ukoliko muha ostane na konturi:



uhvatit će ju drugi pauk. On najprije kreće prema vrhu G. Ako ju nije uhvatio putem, postoje dvije mogućnosti.

1. slučaj. Muha još nije prešla ni jednu od točaka M, N, P.
Tada je muha na jednom od bridova $\overline{GC}$, $\overline{GF}$, $\overline{GH}$, recimo na $\overline{GC}$. Drugi pauk kreće iz vrha G prema njoj. Kada muha pređe točku M prvi pauk joj ograničava kretanje na konturu sa slike, pa ju drugi pauk slijedi prema jednoj od točaka B ili D.

2. slučaj. Muha je već prešla neku od točaka M, N, P.
Recimo da je muha prešla točku M. Tada je prvi pauk ograničio njeno kretanje na konturu na slici pa ju drugi pauk samo slijedi.

Muha će u oba slučaja biti uhvaćena.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

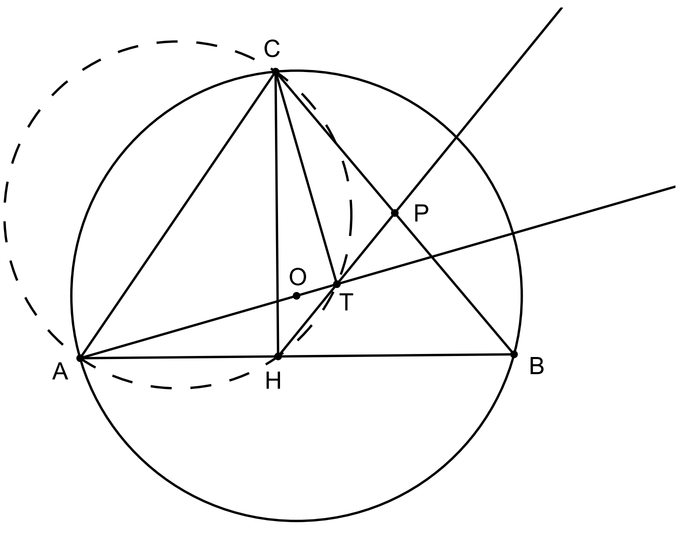
30. ožujka 2009.

Zadatak A-4.1.

Neka je $\overline{CH}$ visina šiljastokutnog trokuta ABC, a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO, dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$.

Rješenje.

Označimo s P sjecište pravca TH i dužine $\overline{BC}$. Dokazat ćemo da je P polovište stranice$\overline{BC}$.



Kako je $\sphericalangle AHC = \sphericalangle ATC = 90°$, točke A, H, T i C leže na istoj kružnici, pa je

$$\begin{aligned}
\sphericalangle PHC = \sphericalangle THC = \sphericalangle TAC & \qquad \text{(obodni kutovi nad istim lukom)}\\
= \sphericalangle OAC = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle AOC) & \qquad \text{(trokut } AOC \text{ je jednakokračan)}\\
= 90° - \sphericalangle ABC & \qquad \text{(središnji i obodni kut)}\\
= 90° - \sphericalangle HBC = \sphericalangle BCH = \sphericalangle PCH. &
\end{aligned}$$

Dakle, trokut PCH je jednakokračan. Dalje je

$$\sphericalangle PBH = 90° - \sphericalangle BCH = 90° - \sphericalangle PHC = \sphericalangle PHB,$$

pa je i trokut PHB jednakokračan. Zaključujemo da vrijedi $|PC| = |PH| = |PB|$ i time je tvrdnja zadatka dokazana.

Zadatak A-4.2.

Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje.

Prvi način. Označimo $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$, ..., $a_n = x_{n-1} - x_n$. Tada su $a_1, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi.

Nejednakost koju trebamo dokazati možemo zapisati kao

$$x_0 - x_1 + x_1 - \ldots - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n,$$

odnosno $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right) \geq 2n.$

No ovo direktno slijedi iz nejednakosti $x + x^{-1} \geq 2$ $(x \geq 0)$.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = \dfrac{1}{a_i}$ za sve $i = 1, \ldots, n$, što je zbog $a_i > 0$ ekvivalento s $a_i = 1$. Dakle, jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \cdots = x_{n-1} - x_n = 1,$$

tj. ako je $x_0, x_1, \ldots, x_n$ aritmetički niz s razlikom -1.

Drugi način. Označimo $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$,..., $a_n = x_{n-1} - x_n$.

Nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine povlači da je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Zato je

$$\frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq \frac{n^2}{x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n} = \frac{n^2}{x_0 - x_n}.$$

Traženu nejednakost dobivamo sada iz $x_0 - x_n + \dfrac{n^2}{x_0 - x_n} \geq 2n$, što je ekvivalentno s

$$\left(\sqrt{x_0 - x_n} - \frac{n}{\sqrt{x_0 - x_n}} \right)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Jednakost se u A-H nejednakosti postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ tj. $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \cdots = x_{n-1} - x_n$.

U drugoj korištenoj nejednakosti (1) jednakost se postiže ako i samo ako je $x_0 - x_n = n$.

To znači da nejednakost iz zadatka postaje jednakost ako i samo ako je $x_0, x_1, \ldots, x_n$ aritmetički niz s razlikom -1.

Zadatak A-4.3.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} \big(2xy - f(y)\big)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

Neka funkcija f zadovoljava uvjet zadatka. Tada je $f(x) \geq 2xy - f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa za $y = x$ dobivamo da je $f(x) \geq x^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Nadalje iz uvjeta slijedi da za svaki x postoji $y = y_x$ takav da je $f(x) = 2xy_x - f(y_x)$. Iz ovog i iz posljednje nejednakosti dobivamo

$$x^2 \leq f(x) = 2xy_x - f(y_x) \leq 2xy_x - y_x^2,$$

pa je $(x - y_x)^2 \leq 0$, tj. $y_x = x$.

Sada iz $f(x) = 2xy_x - f(y_x)$ slijedi $f(x) = x^2$.

Ova funkcija je rješenje zadatka jer za nju vrijedi

$$\max_{y \in \mathbb{R}} \big(2xy - f(y)\big) = \max_{y \in \mathbb{R}} \big(2xy - y^2\big) = \max_{y \in \mathbb{R}} \big(x^2 - (x-y)^2\big) = x^2 = f(x).$$

Zadatak A-4.4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n), $m, n > 1$, za koje je $n^3 - 1$ djeljivo s $mn - 1$.

Rješenje.

Neka su $m, n > 1$ takvi da je $mn - 1 \,\big|\, n^3 - 1$.

Vrijedi $(n^3 - 1)m - n^2(mn - 1) = n^2 - m$, pa $mn - 1 \,\big|\, n^2 - m$.

Također $m(n^2 - m) - (mn - 1)n = n - m^2$, pa $mn - 1 \,\big|\, n - m^2$.

Ako je $n > m^2$, tada $mn - 1 \leq n - m^2 \leq n - 1$, pa slijedi $mn \leq n$, što je nemoguće.

Ako je $n = m^2$, tada je očito $m^3 - 1 \,\big|\, m^6 - 1$, pa su svi parovi (m, m^2), $m > 1$ rješenja.

Ako je $n < m^2$, iz $mn - 1 \leq n^3 - 1$ zaključujemo $\sqrt{n} < m \leq n^2$.

Ako je $n^2 - m > 0$, vrijedi $mn - 1 \leq n^2 - m < n^2 - 1$, odnosno $m < n$, što je nemoguće, jer iz $mn - 1 \leq m^2 - n < m^2 - 1$, slijedi $n < m$.

Dakle, mora biti $m = n^2$. Budući da $n^3 - 1 \,\big|\, n^3 - 1$, svi parovi (n^2, n), $n > 1$ su također rješenja.

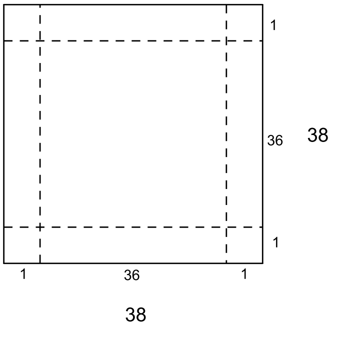
Uvjet zadovoljavaju svi parovi oblika (k, k^2) i (k^2, k), gdje je $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

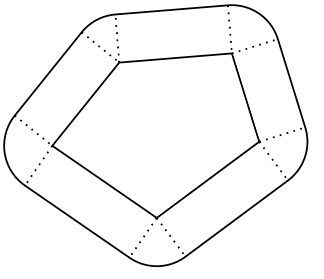
Zadatak A-4.5.

Unutar kvadrata stranice duljine 38 smješteno je 100 konveksnih mnogokuta, pri čemu je površina svakog od njih najviše π, a opseg najviše 2π. Dokaži da unutar tog kvadrata postoji krug polumjera 1 koji ne siječe niti jedan od danih 100 mnogokuta.

Rješenje.

Središte traženog kruga mora biti udaljeno za barem 1 od rubova kvadrata. Naći ćemo to središte u kvadratu kojemu su stranice paralelne sa stranicama početnog kvadrata i udaljene od njih za 1. Duljina stranice tog manjeg kvadrata je 36.





Skup svih točaka koje leže na udaljenosti manjoj od 1 od konveksnog mnogokuta P je područje Q omeđeno dužinama paralelnim stranicama poligona P i kružnim lukovima koji spajaju krajeve tih dužina (vidi sliku).

Za površine likova P i Q vrijedi

$$\text{Površina}(Q) = \text{Površina}(P) + \text{Opseg}(P) \times 1 + \pi$$

jer kružni isječci u kutovima lika Q čine zajedno puni krug polumjera 1.

Zbog uvjeta zadatka $\text{Površina}(P) < \pi$ i $\text{Opseg}(P) < 2\pi$, pa je $\text{Površina}(Q) < 4\pi$.

Likovi Q mogu se preklapati, no površina njihove unije, tj. skupa svih točaka koje su udaljene za najviše 1 od nekog od 100 danih mnogokuta iznosi najviše 400π.

Kako je $400\pi \leq 400 \cdot 3.2 = 40 \cdot 32 = 36^2 - 4^2 < 36^2$, postoji točka unutar kvadrata stranice 36 koja nije prekrivena ni jednim likom Q, pa tu točku možemo uzeti za središte traženog kruga polumjera 1. Taj krug ne siječe niti jedan od danih mnogokuta.