Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

29. siječnja 2009.

UPUTE:

Na poleđini ovog lista nalazi se 8 zadataka.

Prvih 5 zadataka vrijedi po 8 bodova.
Potpuno riješen zadatak nosi 8 bodova, a rješenje s manjom greškom 4 boda.

Zadaci 6., 7. i 8. vrijede po 20 bodova i detaljno se boduju.

Vrijeme rješavanja je 180 minuta.

Nije dopuštena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Riješi nejednadžbu $\dfrac{x+2}{x-3} \leq 1$ u skupu prirodnih brojeva.

2. (8) Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je $a + b = 378$ i $D(a, b) = 63$ ($D(a, b)$ je najveći zajednički djelitelj).

3. (8) Za koje realne brojeve m jednadžba $3x + 9 = m(m - x)$ ima jedinstveno rješenje?

4. (8) U kvadratu $ABCD$ stranice duljine 6 cm na dijagonali $\overline{AC}$ dana je točka T tako da je $|TC| = \dfrac{1}{4}|AC|$. Pravac kroz točke B i T siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki P.
Odredi udaljenost $|PC|$.

5. (8) Paralelogram $ABCD$ se može podijeliti na četiri jednakostranična trokuta stranice duljine 2 cm. Kolika je duljina dulje dijagonale paralelograma?

6. (20) Ako je $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, koliko je $(a + 2b - 3c)^{2009}$?

7. (20) Pas trči za zecom koji je za 90 svojih skokova ispred njega. Dok zec skoči 6 puta, pas skoči samo 5 puta, a dva pseća skoka jednako su dugačka kao tri zečja. Koliko će skokova napraviti zec do trenutka kada ga pas uhvati?

8. (20) Poredaj po veličini vrijednosti izraza A, B i C, ako je $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a < b$, $x \neq y$:

$$
\begin{aligned}
A &= \left[\left(a + \frac{z - xy}{x - y}\right) \cdot \left(a - \frac{z - xy}{x - y}\right) + \left(\frac{z - xy}{x - y}\right)^2\right] : b^2, \\
B &= \left(\frac{a+1}{a+2} + \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a+2}\right) \cdot (a + b), \\
C &= \frac{a}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a}}} \cdot \frac{a + \cfrac{2}{a}}{a + \cfrac{1}{a}}.
\end{aligned}
$$

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Racionaliziraj razlomak $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

2. (8) Polinom $f(x)=x^2+px+q$ pri dijeljenju s polinomom $g_1(x)=x-1$ daje ostatak 6, a pri dijeljenju s $g_2(x)=x-2$ ostatak 12. Odredi polinom $f(x)$.

3. (8) Odredi kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima kojoj je $\left(\dfrac{i^{2009}+1}{i^{2009}-1}\right)^{2009}$ jedno rješenje.

4. (8) Riješi nejednadžbu $\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5}<1$.

5. (8) Nađi sva rješenja jednadžbe $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$ u skupu kompleksnih brojeva.

6. (20) Dva pravokutna trokuta imaju zajedničku hipotenuzu. Razlika duljina kateta jednog od njih je 9 cm, a drugog 13 cm. Zbroj površina ta dva trokuta je 90 cm^2. Izračunaj duljine njihovih kateta.

7. (20) Za koje cijele brojeve k kvadratna jednadžba $kx^2+(2k-1)x+k-2=0$ ima racionalna rješenja.

8. (20) Dan je jednakokračan trokut ABC takav da je $|AC|=|BC|=12$ cm. Paralela s krakom prolazi polovištem visine na osnovicu trokuta i siječe osnovicu u točki M a drugi krak u točki N. Kolika je duljina dužine $\overline{MN}$?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Izračunaj vrijednost izraza $\log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50$.

2. (8) Odredi zbroj svih rješenja jednadžbe $\log_8(\sin 2x) = -\dfrac{1}{3}$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

3. (8) Duljina stranice pravilnog šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka je 3 cm. Njegove stranice $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_6A_1}$ su preko vrhova A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1 produžene za 5 cm do vrhova B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 novog pravilnog šesterokuta. Kolika je duljina njegove stranice?

4. (8) S iste strane središta kugle položene su dvije paralelne ravnine čija su presjecišta s kuglom krugovi s površinama 4π cm^2 i 49π cm^2. Ako je udaljenost tih ravnina jednaka 3 cm, koliki je polumjer kugle?

5. (8) Dokaži da za sve realne brojeve x vrijedi $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \dfrac{1}{2}$.

6. (20) Koliki su šiljasti kutovi pravokutnog trokuta ako za njegove katete a, b i hipotenuzu c vrijedi $4ab = c^2\sqrt{3}$?

7. (20) Riješi nejednadžbu $(x+1)^{-x^2-2x} > x + 1$.

8. (20) Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 15 cm, a jedan njegov kut je 15°. Izračunaj duljinu odreska simetrale pravog kuta koji je unutar trokuta.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Odredi umnožak kvadrata rješenja jednadžbe $z^3 - (1+i)^2 = 0$.

2. (8) Dokaži da je za svaki prirodan broj $n \geq 2$ znamenka jedinica broja 2^{2^n} jednaka 6.

3. (8) U raspisu izraza $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$ koeficijent trećeg člana je za 44 veći od koeficijenta drugog člana.

   Odredi član koji ne sadrži x.

4. (8) U trokutu ABC pravac vrhom A raspolavlja težišnicu iz vrha B. U kojem omjeru taj pravac dijeli stranicu $\overline{BC}$?

5. (8) Odredi kut između tangenata parabole $y^2 = 4x$ u točkama njezinog presjeka s pravcem $2x + y - 12 = 0$.

6. (20) Odredi sva rješenja jednadžbe

$$(x^2 - 5x + 5)^{2\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 4} = 1.$$

7. (20) Prvi član aritmetičkog niza je $a_1 = 7$. Za članove niza vrijedi: $a_n - a_{n-1} = 2n + 5,\ n \geq 2$. Koliko je a_{100}?

8. (20) Dana je hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$. Odredi površinu paralelograma kojem dvije stranice leže na njezinim asimptotama, a jedan vrh mu je točka na hiperboli. Dokaži da površina ne ovisi o odabiru točke!

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Riješi nejednadžbu $\dfrac{x+2}{x-3} \leq 1$ u skupu prirodnih brojeva.

Rješenje.

$$\frac{x+2}{x-3} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x+2-x+3}{x-3} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{5}{x-3} \leq 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad x-3<0 \quad \Longleftrightarrow \quad x<3.$$

Tražena rješenja su $x=1$ i $x=2$. (za potpuno rješenje 8 bodova)

(uključeno rješenje $x=3$ i/ili $x=0$, 4 boda)

2. (8) Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je $a+b=378$ i $D(a, b)=63$ ($D(a, b)$ je najveći zajednički djelitelj).

Rješenje. Iz $a=63x$, $b=63y$ dobivamo $63x+63y=378$ i $x+y=6$, $x, y \in \mathbb{N}$, $D(x, y)=1$.

Tada je $x \in\{1,5\}$ i $y=6-x$ te je $(a, b) \in\{(63,315),(315,63)\}$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(ako napiše $x \in\{2,4\}$ i $(a, b) \in\{126,252),(252,126)\}$ ili

$x \in\{3,3\}$ i $(a, b) \in\{189,189)\}$, 4 boda)

3. (8) Za koje realne brojeve m jednadžba $3x+9=m(m-x)$ ima jedinstveno rješenje?

Rješenje. Sređivanjem dobivamo $(m+3)x=m^2-9$.

Za $m \neq -3$ je $m+3 \neq 0$ pa postoji jedinstveno rješenje $x=m-3$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za rješenje $x=m-3$ (uvijek), 0 bodova)

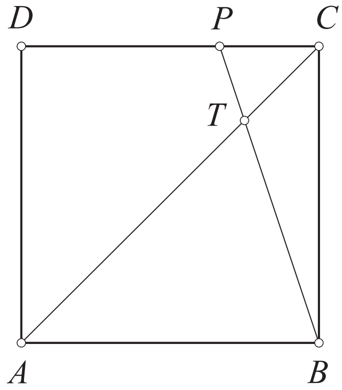
4. (8) U kvadratu $ABCD$ stranice duljine 6 cm na dijagonali $\overline{AC}$ dana je točka T tako da je $|TC|=\dfrac{1}{4}|AC|$. Pravac kroz točke B i T siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki P.

Odredi udaljenost $|PC|$.

Rješenje. Trokuti ABT i CPT su slični (jednaki kutovi) i vrijedi

$$|AB| : |PC| = |AT| : |TC| = \frac{3}{4}|AC| : \frac{1}{4}|AC| = 3 : 1,$$

pa je $|PC| = \frac{1}{3}|AB| = 2$. Udaljenost $|PC|$ je 2 cm.



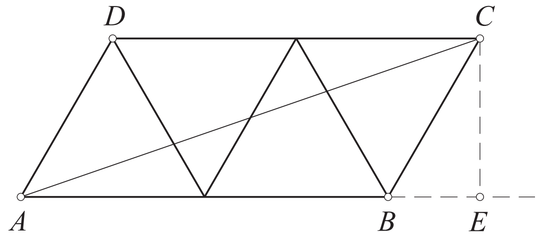
(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za postavljene omjere 4 boda)

5. Paralelogram $ABCD$ se može podijeliti na četiri jednakostranična trokuta stranice
(8) duljine 2 cm. Kolika je duljina dulje dijagonale paralelograma?

Rješenje. Nožište okomice iz vrha C na pravac AB označimo s E.

Trokut BCE je polovina jednakostraničnog, pa imamo $\sphericalangle CBE = 60°$, $|CB| = 2$ cm, $|CE| = \sqrt{3}$ cm, $|BE| = 1$ cm.



Po Pitagorinom poučku na $\triangle ACE$ dobivamo: $|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2$, $(*)$
tj. $|AC| = \sqrt{5^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{28}$ (ili $2\sqrt{7}$).

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za primjenu Pitagorinog poučka $(*)$ 4 boda)

6. Ako je $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, koliko je $(a + 2b - 3c)^{2009}$?
(20)

Rješenje. Pomnožimo li zadanu jednakost s 2 i prebacimo sve na lijevu stranu dobit ćemo

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0.$$

Preuredimo li jednakost dobivamo

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ca = 0. \qquad \text{(3 boda)}$$

odnosno

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \qquad \text{(7 bodova)}$$

odakle je $a = b = c$ (5 bodova)

pa je tražena vrijednost jednaka nula. (5 bodova)

7. (20) Pas trči za zecom koji je za 90 svojih skokova ispred njega. Dok zec skoči 6 puta, pas skoči samo 5 puta, a dva pseća skoka jednako su dugačka kao tri zečja. Koliko će skokova napraviti zec do trenutka kada ga pas uhvati?

Rješenje. Duljina psećeg skoka je jednaka $\frac{3}{2}$ duljine zečjeg, pa je 4 pseća skoka jednako duljini 6 zečjih skokova. (5 bodova)

Dok zec skoči 6 skokova pas skoči 5 puta pa za to vrijeme pas prevali udaljenost od $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$ zečjih skokova. (5 bodova)

Ako je x broj zečjih skokova, iz jednadžbe $90 + x = \frac{5}{4}x$ dobivamo $x = 360$. Pas će uloviti zeca nakon 360 zečjih (ili 300 psećih skokova). (10 bodova)

8. (20) Poredaj po veličini vrijednosti izraza A, B i C, ako je $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a < b$, $x \neq y$:

$$\begin{aligned}
A &= \left[\left(a + \frac{z-xy}{x-y}\right) \cdot \left(a - \frac{z-xy}{x-y}\right) + \left(\frac{z-xy}{x-y}\right)^2\right] : b^2, \\
B &= \left(\frac{a+1}{a+2} + \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a+2}\right) \cdot (a+b), \\
C &= \frac{a}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}} \cdot \frac{a + \frac{2}{a}}{a + \frac{1}{a}}.
\end{aligned}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(a+\frac{z-xy}{x-y}\right)\cdot\left(a-\frac{z-xy}{x-y}\right)+\left(\frac{z-xy}{x-y}\right)^2\right]:b^2 \\ &= \left[a^2-\left(\frac{z-xy}{x-y}\right)^2+\left(\frac{z-xy}{x-y}\right)^2\right]:b^2=\frac{a^2}{b^2}<1; \end{aligned}$$

(6 bodova)

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{a+1}{a+2}+\frac{1}{a}\right):\left(\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)\cdot(a+b) \\ &= \frac{a(a+1)+a+2}{a(a+2)}:\frac{(a+2)(a+1)-a}{a(a+2)(a+2)(a+1)-a}\cdot(a+b) \\ &= \frac{a^2+2a+2}{a(a+2)}\cdot\frac{a(a+2)}{a^2+2a+2}\cdot(a+b)=a+b\geq 2; \end{aligned}$$

(6 bodova)

$$C=\frac{a}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}}\cdot\frac{a+\cfrac{2}{a}}{a+\cfrac{1}{a}}=\frac{a}{a+\cfrac{a}{a^2+1}}\cdot\frac{\cfrac{a^2+2}{a}}{\cfrac{a^2+1}{a}}=\frac{a^2+1}{a^2+2}\cdot\frac{a^2+2}{a^2+1}=1.$$

(6 bodova)

Poredak je $A<C<B$, tj. najmanja je vrijednost izraza A, a najveća je izraza B. (2 boda)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. (8) Racionaliziraj razlomak $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \qquad (*) \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{12}
\end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za dio rješenja do $(*)$ 4 boda)

(u nazivniku se može grupirati i na druge načine)

2. (8) Polinom $f(x) = x^2 + px + q$ pri dijeljenju s polinomom $g_1(x) = x - 1$ daje ostatak 6, a pri dijeljenju s $g_2(x) = x - 2$ ostatak 12. Odredi polinom $f(x)$.

Prvo rješenje. Dijeljenjem polinoma $f(x)$ s polinomom $g_1(x)$ dobije se ostatak $p + q + 1$:

$$\begin{array}{l}
(x^2 + px + q) \quad : \quad (x-1) \quad = \quad x + p + 1 \\
\underline{-x^2 + x} \\
(p+1)x + q \\
\underline{-(p+1)x + (p+1)} \\
\qquad\qquad p + q + 1
\end{array}$$

Dijeljenjem polinoma $f(x)$ s polinomom $g_2(x)$ dobije se ostatak $2p+q+4$:

$$\begin{array}{lcccc}
(x^2+px+q) & : & (x-2) & = & x+p+2 \\
\underline{-x^2+2x} & & & & \\
(p+2)x+q & & & & \\
\underline{-(p+2)x+(p+2)} & & & & \\
\qquad\qquad 2p+q+4 & & & &
\end{array}$$

Dobijemo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{array}{rcl} p+q+1 & = & 6, \\ \\ 2p+q+4 & = & 12, \end{array}\right\} (*)$$

čija su rješenja $p=3$, $q=2$.

Traženi polinom je $f(x)=x^2+3x+2$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za barem jednu od jednadžbi sustava $(*)$ 4 boda)

Drugo rješenje. Poznato je (Bezoutov teorem) da je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ s $x-\alpha$ zapravo vrijednost $f(\alpha)$. Stoga je: $f(1)=6$ i $f(2)=12$. Dobijemo isti sustav kao u prvom rješenju.

(bodovanje isto kao u prvom rješenju)

Treće rješenje. Imamo

$$\begin{array}{rcl} x^2+px+q & = & (x-1)(x+\alpha)+6 = x^2+(\alpha-1)x-\alpha+6 \\ x^2+px+q & = & (x-2)(x+\beta)+12 = x^2+(\beta-2)x-2\beta+12, \end{array}$$

odakle je

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha-1=p, \qquad & -\alpha+6=q, \\ \\ \beta-2=p, \qquad & -2\beta+12=q. \end{array}\right\} (*)$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobijemo:

$$\alpha-1=\beta-2, \quad -\alpha+6=-2\beta+12, \qquad \text{tj.}$$

$$\alpha-\beta+1=0, \quad \alpha-2\beta+6=0.$$

Rješenje ovog sustava je $\alpha=4$, $\beta=5$, i onda $p=3$, $q=2$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za sustav jednadžbi $(*)$ 4 boda)

3. Odredi kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima kojoj je $\left(\dfrac{i^{2009}+1}{i^{2009}-1}\right)^{2009}$ jedno
(8) rješenje.

Rješenje. Kako je $i^{2009} = i^{4\cdot 502+1} = i$, izraz u zagradi jednak je

$$\frac{i+1}{i-1} = \frac{i+1}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1} = \frac{2i}{-2} = -i.$$

Sada je $(-i)^{2009} = -i^{2009} = -i$.

Kako je jedno rješenje jednako $x_1 = -i$, drugo je $x_2 = i$, tražena kvadratna jednadžba je $(x+i)(x-i) = 0$ tj. $x^2+1=0$, ili svaka jednadžba oblika $ax^2+a=0$ za $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za određeno jedno rješenje kvadratne jednadžbe 4 boda)

4. Riješi nejednadžbu $\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5} < 1$.
(8)

Prvo rješenje. Kako je diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2+3x+5=0$, $D = 3^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -11 < 0$ lli se pokaže da vrijedi $x^2+3x+5 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{11}{4} > 0$, nazivnik se strogo pozitivan za svaki x. $(*)$

Množenjem nejednakosti s x^2+3x+5 dobivamo

$$x^2+3x-5 < x^2+3x+5 \quad \text{tj.} \quad -5 < 5.$$

Kako je ova nejednakost istinita i polazna vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za tvrdnju $(*)$ 4 boda)

Drugo rješenje. Redom imamo:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5} &= 1 - \frac{10}{x^2+3x+5} < 1 \\ \iff &\quad \frac{10}{x^2+3x+5} > 0. \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2+3x+5=0$ negativna ili se pokaže da vrijedi $x^2+3x+5 = \left(x+\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{11}{4} > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, polazna najednakost vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za dobivenu nejednakost $(*)$ 4 boda)

5. (8) Nađi sva rješenja jednadžbe $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ u skupu kompleksnih brojeva.

Rješenje. Zgodnim grupiranjem, množenjem i supstitucijom $t = x^2 + 5x$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
(x+1)(x+4)\cdot(x+2)(x+3) &= 120\\
(x^2+5x+4)(x^2+5x+6) &= 120\\
(t+4)(t+6) &= 120\\
t^2+10t-96 &= 0 \qquad\qquad (*)\\
t_1 = 6, \qquad & t_2 = -16.
\end{aligned}$$

Sada treba riješiti dvije kvadratne jednadžbe

$$\begin{aligned}
x^2+5x=6, \qquad & x^2+5x=-16, \qquad \text{tj.}\\
x^2+5x-6=0, \qquad & x^2+5x+16=0.
\end{aligned}$$

Njihova rješenja su $x_1 = -6$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{-5-i\sqrt{39}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-5+i\sqrt{39}}{2}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za rješenja $t_{1,2}$ jednažbe (*) 4 boda)

(moguće su i druge supstitucije, npr. $t = x^2 + 5x + 5$)

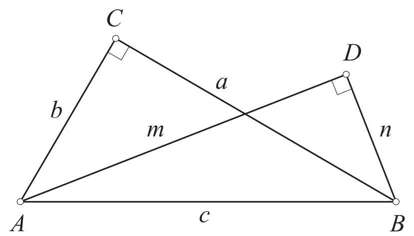
6. (20) Dva pravokutna trokuta imaju zajedničku hipotenuzu. Razlika duljina kateta jednog od njih je 9 cm, a drugog 13 cm. Zbroj površina ta dva trokuta je 90 cm^2. Izračunaj duljine njihovih kateta.

Prvo rješenje. Neka su a i b katete jednog te m i n katete drugog trokuta, a c njihova zajednička hipotenuza. Iz uvjeta zadatka imamo:

$$a^2+b^2=c^2, \qquad m^2+n^2=c^2,$$

$$a-b=9, \qquad m-n=13,$$

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}mn=90.$$



Dobijemo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} a-b &= 9, && (1)\\ m-n &= 13, && (2)\\ ab+mn &= 180, && (3)\\ a^2+b^2 &= m^2+n^2. && (4) \end{aligned}$$

(4 boda)

Iz prve i druge jednadžbe imamo

$$a=b+9, \quad m=13+n,$$

Iz $(4)+2\cdot(3)$ dobivamo

$$\begin{aligned} (a+b)^2-(m-n)^2 &= 360,\\ (9+2b)^2-13^2 &= 360,\\ b^2+9b-112 &= 0. \end{aligned}$$

Zadovoljava samo pozitivno rješenje $b=7$. Iz (1) je $a=16$. Duljine kateta prvog trokuta su 16 cm i 7 cm.

(8 bodova)

Za drugi trokut imamo:

$$\begin{aligned} m-n &= 13\\ mn &= 180-ab=68\\ n(13+n) &= 68\\ n^2+13n-68 &= 0. \end{aligned}$$

Zadovoljava samo pozitivno rješenje $n=4$. Sada je $m=17$. Duljine kateta drugog trokuta su 17 cm i 4 cm.

(8 bodova)

Drugo rješenje. Iz uvjeta zadatka dobivamo ove jednadžbe:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 && (1)\\ a-b &= 9 && (2)\\ m^2+n^2 &= c^2 && (3)\\ m-n &= 13 && (4)\\ \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}mn &= 90 \Longrightarrow\\ 2ab+2mn &= 360 && (5) \end{aligned}$$

(4 boda)

Iz (1) i (3) imamo

$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2. \qquad (6)$$

Zbrajanjem (5) i (6) i sređivanjem dobivamo

$$(a+b)^2 = (m-n)^2 + 360 \quad \text{tj.} \quad (a+b)^2 = 13^2 + 360 = 529.$$

Konačno je

$$a + b = 23. \qquad (7)$$

(8 bodova)

Iz (2) i (7) imamo $a = 16$, $b = 7$.

Zbrajanjem $a^2 + b^2 = m^2 + n^2$ i $360 = 2ab + 2mn$ dobivamo

$$(a-b)^2 + 360 = (m+n)^2 \quad \text{tj.} \quad (m+n)^2 = 9^2 + 360 = 441$$

i zatim

$$m + n = 21. \qquad (8)$$

Iz (4) i (8) slijedi $m = 17$ i $n = 4$.

(8 bodova)

7. (20) Za koje cijele brojeve k kvadratna jednadžba $kx^2 + (2k-1)x + k - 2 = 0$ ima racionalna rješenja.

Rješenje. Nužno je i dovoljno da diskriminanta

$$D = (2k-1)^2 - 4k(k-2) = 4k + 1$$

bude kvadrat racionalnog broja m tj. $4k + 1 = m^2$. Odavde vidimo da m mora biti neparan cijeli broj. (5 bodova)

Kako je m neparan, tj. $m = 2a + 1$, imamo

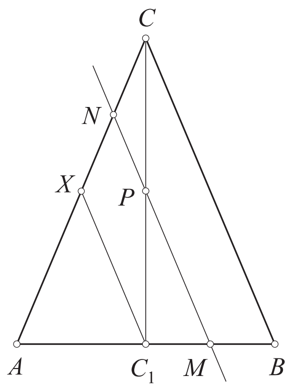
$$\begin{aligned} 4k+1 &= (2a+1)^2 \\ 4k+1 &= 4a^2 + 4a + 1 \\ k &= a^2 + a = a(a+1) \end{aligned}$$

(15 bodova)

Dakle, broj k mora biti oblika $a^2 + a,\ a \in \mathbb{Z}$ odnosno $a(a+1)$, tj. jednak umnošku dva uzastopna cijela broja. Diskriminanta je $D = 4k + 1 = (2a+1)^2$.

8. (20) Dan je jednakokračan trokut ABC takav da je $|AC| = |BC| = 12$ cm. Paralela s krakom prolazi polovištem visine na osnovicu trokuta i siječe osnovicu u točki M a drugi krak u točki N. Kolika je duljina dužine $\overline{MN}$?

Prvo rješenje. Dužina $\overline{MP}$ je srednjica trokuta C_1BC (pri čemu je C_1 nožište visine na osnovicu). Stoga je M polovište od $\overline{C_1B}$. (10 bodova)



Trokuti AMN i ABC su slični (jednaki kutovi). Koeficijent sličnosti je $k = \dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{3}{4}$.

(5 bodova)

Odavde slijedi $|MN| = \dfrac{3}{4}|BC| = 9$ cm. (5 bodova)

Drugo rješenje. Dužina $\overline{MP}$ je srednjica trokuta BCC_1 i $|MP| = \dfrac{1}{2}|BC| = 6$ cm.

(5 bodova)

Dužina $\overline{NP}$ je srednjica trokuta XC_1C, a $\overline{XC_1}$ je srednjica trokuta ABC. Zato je $|XC_1| = \dfrac{1}{2}|BC|$, pa je

$$|NP| = \frac{1}{2}|XC_1| = \frac{1}{4}|BC| = 3 \text{ cm}.$$

(10 bodova)

Stoga je $|MN| = |MP| + |PN| = 6 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 9$ cm. (5 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. Izračunaj vrijednost izraza $\log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50$.
(8)

Prvo rješenje. Redom imamo:

$$\begin{aligned}
\log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50 &= \log^2 5 + \log 2 \cdot (\log 25 + \log 2) \\
&= \log^2 5 + \log 2 \cdot (2 \log 5 + \log 2) \\
&= \log^2 5 + 2 \log 5 \cdot \log 2 + \log^2 2 \\
&= (\log 5 + \log 2)^2 = (\log 10)^2 = 1.
\end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

Drugo rješenje. Slično dobivamo:

$$\begin{aligned}
\log^2 5 + \log 2 \cdot \log 50 &= \log^2 5 + \log 2 \cdot (\log 5 + \log 10) \\
&= \log^2 5 + \log 2 \cdot (\log 5 + 1) \\
&= \log^2 5 + \log 5 \cdot \log 2 + \log 2 \\
&= \log 5 \cdot (\log 5 + \log 2) + \log 2 \\
&= \log 5 \cdot \log 10 + \log 2 \\
&= \log 5 + \log 2 = \log 10 = 1.
\end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

2. Odredi zbroj svih rješenja jednadžbe $\log_8(\sin 2x) = -\dfrac{1}{3}$ na intervalu $[0, 2\pi]$.
(8)

Rješenje. Uz uvjet $\sin 2x > 0$ iz $\log_8(\sin 2x) = -\dfrac{1}{3} = \log_8 8^{-\frac{1}{3}} = \log_8 \dfrac{1}{2}$ dobivamo

$$\sin 2x = \frac{1}{2},$$

odakle je zadovoljen uvjet i imamo

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

tj.

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ili} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi. \qquad (*)$$

Na intervalu $[0, 2\pi]$ rješenja su $x_1 = \frac{\pi}{12}$, $x_2 = \frac{5\pi}{12}$, $x_3 = \frac{13\pi}{12}$, $x_1 = \frac{17\pi}{12}$.

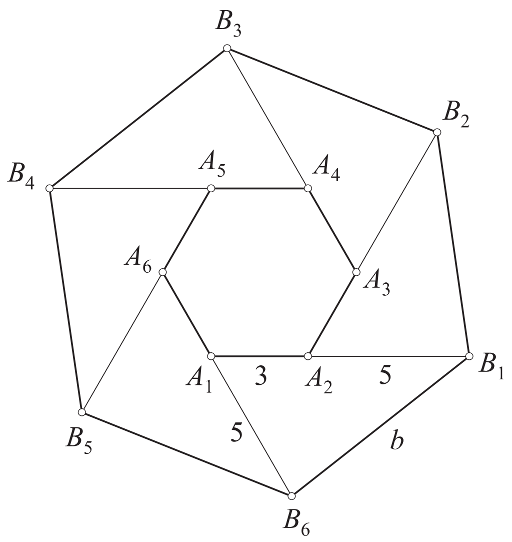
Zbroj svih rješenja je $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{13\pi}{12} + \frac{17\pi}{12} = 3\pi$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za dio rješenja $(*)$ 4 boda)

3. (8) Duljina stranice pravilnog šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jednaka je 3 cm. Njegove stranice $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_6A_1}$ su preko vrhova A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1 produžene za 5 cm do vrhova B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 novog pravilnog šesterokuta. Kolika je duljina njegove stranice?

Rješenje.



Po kosinusovom poučku vrijedi:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= |B_1B_6|^2 = |A_1B_6|^2 + |A_1B_1|^2 - 2|A_1B_6| \cdot |A_1B_1| \cdot \cos \sphericalangle B_1A_1B_6 \\
&= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49,
\end{aligned}
$$

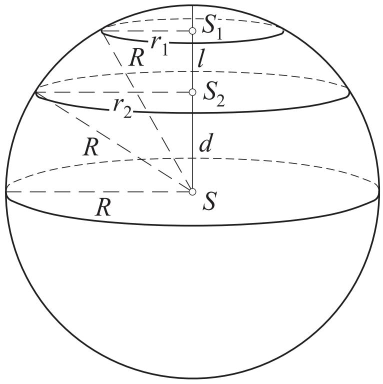
odakle je $b = 7$ cm.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za pravilnu primjenu kosinusovog poučka, ali grešku u računu, 4 boda)

4. (8) S iste strane središta kugle položene su dvije paralelne ravnine čija su presjecišta s kuglom krugovi s površinama 4π cm^2 i 49π cm^2. Ako je udaljenost tih ravnina jednaka 3 cm, koliki je polumjer kugle?

Rješenje. Označimo s $r_1 = 2$ cm i $r_2 = 7$ cm polumjere presjeka paralelnih ravnina s kuglom, s $l = 3$ cm njihovu udaljenost te s R polumjer kugle.



Primjenom Pitagorinog poučka, iz slike dobivamo

$$\begin{aligned} R^2 &= r_1^2 + (d+l)^2 = r_1^2 + d^2 + 2dl + l^2 = 13 + d^2 + 6d, \\ R^2 &= r_2^2 + d^2 = 49 + d^2, \end{aligned}$$

a odavde $6d = 36$ tj. $d = 6$, $R = \sqrt{49+36} = \sqrt{85}$.

Polumjer kugle je $R = \sqrt{85}$ cm.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za pravilnu primjenu Pitagorinog poučka barem u jednom slučaju 4 boda)

5. Dokaži da za sve realne brojeve x vrijedi $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \dfrac{1}{2}$.
(8)

Prvo rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

Drugo rješenje. Slično dobivamo

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + (1 - \sin^2 x)^2 = 2\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 \\ &= \frac{1}{2}(4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2\sin^2 x - 1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

Treće rješenje. Polazna nejednakost je ekvivalentna sljedećima:

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &\geq \frac{1}{2} \\ \iff \quad (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x &\geq \frac{1}{2} \\ \iff \quad 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x &\geq \frac{1}{2} \\ \iff \quad 4\sin^2 x \cos^2 x &\leq 1 \\ \iff \quad \sin^2 2x &\leq 1, \end{aligned}$$

a ovo uvijek vrijedi. Zato vrijedi i polazna nejednakost.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

6. (20) Koliki su šiljasti kutovi pravokutnog trokuta ako za njegove katete a, b i hipotenuzu c vrijedi $4ab = c^2\sqrt{3}$?

Prvo rješenje. Za dani pravokutan trokut vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$.

Za kut α nasuprot stranici duljine a uvrštavanjem u danu jednakost dobivamo:

$$\begin{aligned} 4ab &= \sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}b^2 \qquad / : b^2 \\ 4\frac{a}{b} &= \sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 4\,\mathrm{tg}\,\alpha + \sqrt{3} &= 0. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Odavde dobivamo:

$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \sqrt{3}$ tj. $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 30°$ ili

$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ tj. $\alpha_2 = 30°$, $\beta_2 = 60°$.

Šiljasti kutovi tog trokuta su 30° i 60°. (10 bodova)

Drugo rješenje. Iz dane jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} 4ab &= c^2\sqrt{3} \qquad / : c^2 \\ 4 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} &= \sqrt{3} \\ 4\sin\alpha\cos\alpha &= \sqrt{3} \quad \text{tj.} \quad \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

(10 bodova)

Odavde slijedi $2\alpha = 60°$ ili $2\alpha = 120°$ tj. $\alpha = 30°$ ili $\alpha = 60°$, odnosno $\beta = 60°$ ili $\beta = 30°$. (10 bodova)

Treće rješenje. Iz $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$ i dane jednakosti imamo

$$\begin{aligned} 4 \cdot c\sin\alpha \cdot c\cos\alpha &= c^2\sqrt{3} \quad / : \ 2c^2 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

odnosno $\sin 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (10 bodova)

Kutovi traženog trokuta su $30°$ i $60°$. (10 bodova)

7. Riješi nejednadžbu $(x+1)^{-x^2-2x} > x+1$.
(20)

Rješenje. Za $x+1 < 0$ izraz na lijevoj strani nije definiran, a za $x+1 = 0$ i $x+1 = 1$ nejednakost ne vrijedi. Preostaje promatrati slučajeve:

$1°$ $0 < x+1 < 1$ tj. $-1 < x < 0$,

$2°$ $1 < x+1$ tj. $x > 0$.

(6 bodova)

$1°$ Redom dobivamo:

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x &< 1 \\ x^2 + 2x + 1 &> 0 \\ (x+1)^2 &> 0, \end{aligned}$$

što je zadovoljeno za $x \neq -1$. U ovom slučaju nejednadžba je zadovoljena za $x \in \langle -1, 0\rangle$. (6 bodova)

$2°$ Dobivamo

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x &> 1 \\ x^2 + 2x + 1 &< 0 \\ (x+1)^2 &< 0. \end{aligned}$$

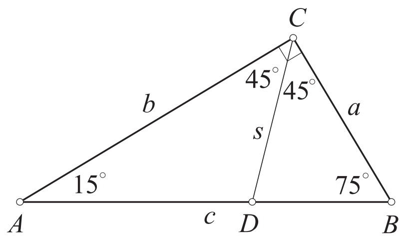
U ovom slučaju nijedan x ne zadovoljava nejednadžbu. (6 bodova)

Konačno rješenje je $x \in \langle -1, 0\rangle$. (2 boda)

8. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 15 cm, a jedan njegov kut je $15°$. Izračunaj
(20) duljinu odreska simetrale pravog kuta koji je unutar trokuta.

Prvo rješenje. Simetrala pravog kuta siječe hipotenuzu u točki D. Označimo s s duljinu odreska simetrale pravog kuta unutar trokuta.

Promatrajmo trokute ABC i ADC:



$$\cos 15^\circ = \frac{b}{c} \quad \text{tj.} \quad b = c\cos 15^\circ = 15\cos 15^\circ;$$

$$\frac{b}{s} = \frac{\sin(180^\circ - (45^\circ + 15^\circ))}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 15^\circ},$$

(10 bodova)

odakle dobivamo

$$s = \frac{2b\sin 15^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot 15\cdot\cos 15^\circ\sin 15^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{15\cdot\sin 30^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

(8 bodova)

Duljina odreska simetrale pravog kuta je $s = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm. (2 boda)

Drugo rješenje. Kako je s simetrala pravog kuta, površina trokuta ABC jednaka je zbroju površina trokuta ADC i BDC, pa imamo

$$P = \frac{sa\sin 45^\circ + sb\sin 45^\circ}{2} = \frac{s(a+b)\sqrt{2}}{4}.$$

odavde je

$$s = \frac{4P}{(a+b)\sqrt{2}} = \frac{2ab}{(a+b)\sqrt{2}}.$$

(8 bodova)

Iz $a = c\sin 15^\circ$ i $b = c\cos 15^\circ$ dobivamo

$$2ab = 2c^2\sin 15^\circ\cos 15^\circ = c^2\sin 30^\circ = \frac{c^2}{2}.$$

(5 bodova)

Nadalje,

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab = \frac{3}{2}c^2 \quad \text{tj.} \quad a + b = c\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

(5 bodova)

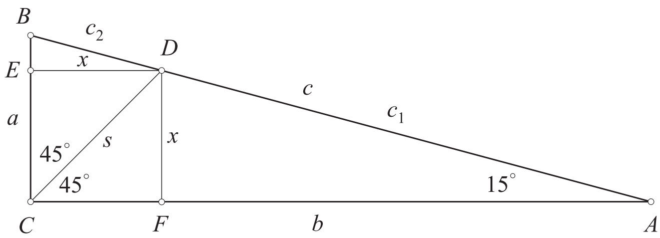
Konačno je

$$s = \frac{\frac{c^2}{2}}{c\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{c}{2\sqrt{3}} = \frac{c\sqrt{3}}{6}.$$

Duljina odreska simetrale pravog kuta je $s = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

(2 boda)

Treće rješenje. Odrezak simetrale pravog kuta unutar trokuta je dijagonala kvadrata $CFDE$ stranice duljine x. Tada je tražena duljina $s = x\sqrt{2}$.



Iz trokuta ADF i DBE dobivamo $c_1 = \dfrac{x}{\sin 15^\circ}$, $c_2 = \dfrac{x}{\cos 15^\circ}$ i

$$c_1 + c_2 = c = 15 = x \cdot \left(\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} \right) = \frac{x \cdot (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}.$$

(10 bodova)

Pomnožimo li ovo sa $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ dobivamo

$$2x \cdot (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) = \frac{15}{2}.$$

Kvadriranjem slijedi

$$4x^2(1 + \sin 30^\circ) = \frac{225}{4}$$

odakle imamo

$$x^2 = \frac{\frac{225}{4}}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{225}{16} \cdot \frac{2}{3}.$$

(8 bodova)

Konačno je $x = \dfrac{15}{4} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ i $s = \dfrac{15}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

(2 boda)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2009.

1. Odredi umnožak kvadrata rješenja jednadžbe $z^3 - (1+i)^2 = 0$.

(8) *Prvo rješenje.* Redom imamo:

$$
\begin{aligned}
z^3 &= (1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i, \\
2i &= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right); \\
z &= \sqrt[3]{2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}, \\
z_k &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi + 4(k-1)\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 4(k-1)\pi}{6}\right),\ k = 1, 2, 3, \qquad (*) \\
z_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \\
z_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \\
z_3 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt[3]{2}i.
\end{aligned}
$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= -2i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -2i\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = 2i, \\
z_1^2 \cdot z_2^2 \cdot z_3^2 &= (2i)^2 = -4.
\end{aligned}
$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za određivanje rješenja $(*)$, 4 boda)

Drugo rješenje. Zadatak se može riješiti i pomoću Vièteovih formula. Za jednadžbu trećeg stupnja $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, gdje su $x_1,\ x_2,\ x_3$ njezina rješenja, vrijedi $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a}$.

U danom slučaju imamo:

$$\begin{aligned} z^3 - (1+i)^2 &= 0, \\ z^3 - 2i &= 0, \qquad\qquad (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= 2i, \\ z_1^2 \cdot z_2^2 \cdot z_3^2 &= (2i)^2 = -4. \end{aligned}$$

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za preuređenu jednadžbu $(**)$ 4 boda)

2. (8) Dokaži da je za svaki prirodan broj $n \geq 2$ znamenka jedinica broja 2^{2^n} jednaka 6.

Rješenje. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: Za $n = 2$ imamo

$$2^{2^2} = 2^4 = 16,$$

pa tvrdnja vrijedi.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $n \geq 2$, tj. znamenka jedinica broja 2^{2^n} je 6.

Korak indukcije: Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n+1$:

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = \left(2^{2^n}\right)^2 = (\overline{*6})^2 = \overline{**6}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi i za $n+1$, pa po principu matematičke indukcije vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq 2$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za točnu bazu i pretpostavku indukcije 4 boda)

3. (8) U raspisu izraza $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$ koeficijent trećeg člana je za 44 veći od koeficijenta drugog člana.

Odredi član koji ne sadrži x.

Rješenje. Uvjet zadatka može se zapisati u obliku $\dbinom{n}{2} = \dbinom{n}{1} + 44$.

Odavde sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= n+44 \\ n^2-3n-88 &= 0 \quad \Rightarrow \quad n_1=11,\ n_2=-8. \end{aligned}$$

Jedina mogućnost je $n=11$. Neka je A_k koeficijent uz onaj član koji je jednak nuli. Tada je

$$A_k = \binom{11}{k}\left(x\sqrt{x}\right)^{11-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k = \binom{11}{k}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{11-k}\cdot x^{-4k} = \binom{11}{k}\cdot x^{\frac{3}{2}(11-k)-4k}.$$

Kako A_k ne sadrži x imamo

$$\frac{3}{2}(11-k)-4k=0 \quad \Rightarrow \quad k=3.$$

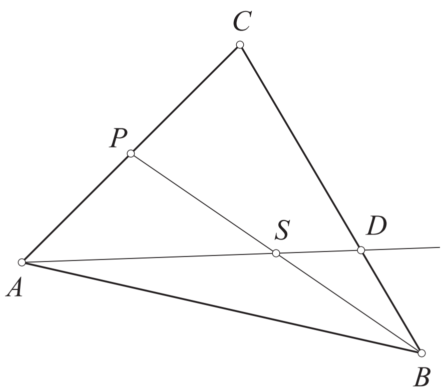
Član koji ne sadrži x je $A_3=\binom{11}{3}=165$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za izračunato $n=11$, 4 boda)

4. U trokutu ABC pravac vrhom A raspolavlja težišnicu iz vrha B. U kojem omjeru
(8) taj pravac dijeli stranicu $\overline{BC}$?

Prvo rješenje (vektorsko). Prikažimo vektor $\overrightarrow{AD}$ na dva načina.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{AD} &= \beta\overrightarrow{AS} = \beta\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}\right) \\ &= \beta\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}\right)\right) = \beta\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right). \end{aligned}$$

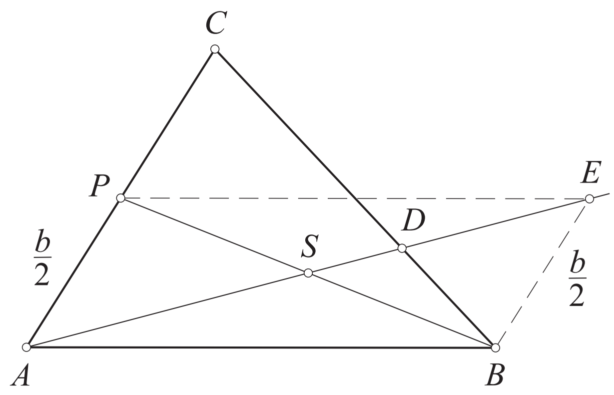
Zbog linerne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ iz $\overrightarrow{AB} + \alpha\overrightarrow{BC} = \beta\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)$ imamo

$$1 = \frac{3}{4}\beta,\ \alpha = \frac{1}{4}\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{4}{3},\ \alpha = \frac{1}{3},$$

odakle dobivamo $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, odnosno točka D dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru $1 : 2$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

Drugo rješenje (geometrijsko). Neka je $|AS| = |SE|$. Četverokut $ABEP$ je paralelogram.



Iz sličnosti trokuta BED i CAD dobivamo

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BE|}{|CA|} = \frac{1}{2},$$

pa je traženi omjer jednak $\frac{1}{2}$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

5. (8) Odredi kut između tangenata parabole $y^2 = 4x$ u točkama njezinog presjeka s pravcem $2x + y - 12 = 0$.

Rješenje. Točke presjeka parabole i pravca dobivamo iz jednadžbi:

$$y^2 = 4x \quad \text{i} \quad y = -2x + 12.$$

Odavde je

$$\begin{aligned}(-2x+12)^2 &= 4x,\\ x^2 - 13x + 36 &= 0,\\ x_1 = 9, \qquad & x_2 = 4,\\ S_1(9,-6), \qquad & S_2(4,4).\end{aligned}$$

Jednadžbe tangenata parabole su:

$$t_1 \quad \ldots \qquad y \cdot (-6) = 2 \cdot (x+9) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x - 3 \quad \Rightarrow \quad k_1 = -\frac{1}{3},$$

$$t_2 \quad \ldots \qquad y \cdot 4 = 2 \cdot (x+4) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Kut α između tangenata određuje se iz relacije

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1,$$

pa je traženi kut jednak $\alpha = 45°$.

(za potpuno rješenje 8 bodova)

(za točne koeficijente smjerova tangenata $k_1,\ k_2$, 4 boda)

6. Odredi sva rješenja jednadžbe
(20)

$$(x^2 - 5x + 5)^{2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4} = 1.$$

Rješenje. Promatrat ćemo tri slučaja.

1° Baza je jednaka 1.

$$x^2 - 5x + 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 4.$$

Oba rješenja zadovoljavaju polaznu jednadžbu. (6 bodova)

2° Eksponent je jednak nuli, a baza različita od nule.

$$2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Uz supstituciju $t = 2^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

čija su rješenja $t_1 = 4$ i $t_2 = \frac{1}{2}$. Odavde dobivamo $x_3 = 2$ i $x_4 = -1$. Kako je za ova rješenja baza različita od nule, oba zadovoljavaju polaznu jednadžbu. (8 bodova)

3° Eksponent je paran broj, a baza jednaka -1.

$$x^2 - 5x + 5 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 2,\ x_6 = 3.$$

U oba slučaja je eksponent paran pa su ovo rješenja polazne jednadžbe.

(6 bodova)

Sva rješena jednadžbe su: $-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

7. Prvi član aritmetičkog niza je $a_1 = 7$. Za članove niza vrijedi:
(20) $a_n - a_{n-1} = 2n + 5,\ n \geq 2$. Koliko je a_{100}?

Rješenje. Raspišimo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 7 \\ a_2 - a_1 &= 9 \\ a_3 - a_2 &= 11 \\ a_4 - a_3 &= 13 \\ &\vdots \\ a_{100} - a_{99} &= 205 \end{aligned}$$

(10 bodova)

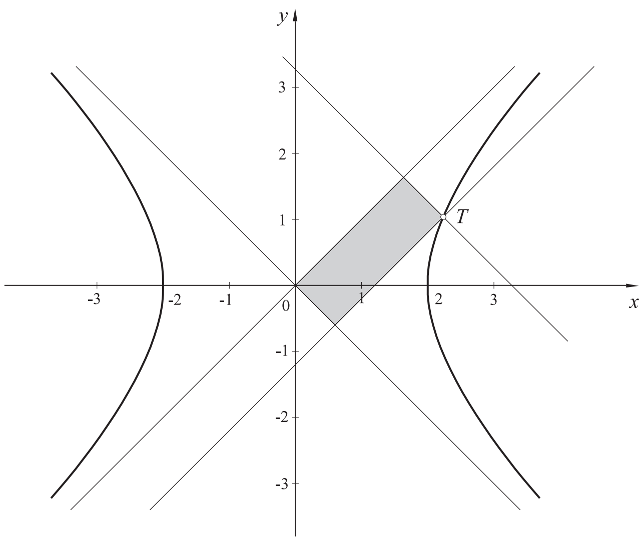
Odavde zbrajanjem dobivamo

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \ldots + a_{100} - a_{99} &= 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots + 205 \\ a_{100} &= \frac{100(7 + 205)}{2} \\ a_{100} &= 10600. \end{aligned}$$

(10 bodova)

8. Dana je hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$. Odredi površinu paralelograma kojem dvije stranice
(20) leže na njezinim asimptotama, a jedan vrh mu je točka na hiperboli. Dokaži da površina ne ovisi o odabiru točke!

Rješenje.



Točka T ove hiperbole dana je s $T(x_0, y_0) = T\left(x_0, \pm\sqrt{x_0^2 - a^2}\right)$.

Asimptote hiperbole su: $y = -x,\ y = x.$ (3 boda)

Kako su one međusobno okomite, određuju pravokutnik.

Označimo s d_1 i d_2 udaljenosti točke T od asimptota. Tada je tražena površina dana s $P = d_1 d_2$. (5 bodova)

Nadalje, udaljenosti točke $T(x_0, y_0)$ od asimptota su

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}}, \quad (\text{od } x + y = 0) \\ d_2 &= \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}, \quad (\text{od } x - y = 0) \end{aligned}$$

(10 bodova)

pa je tražena površina jednaka

$$P = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_0^2 - y_0^2|}{} = \frac{a^2}{2},$$

jer je T na hiperboli. Vidimo da površina ne ovisi o izboru točke T! (2 boda)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

1. (20) Odredi nepoznate znamenke a, b, c, d tako da vrijedi $\overline{a3bc} \cdot 45 = \overline{37d15b}$.

2. (20) U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$|x+3| + 2\sqrt{x^2+2x+1} = 7.$$

3. (20) Duljine kateta pravokutnog trokuta su 8 cm i 6 cm. Unutar trokuta dana je točka T koja je od kraće katete udaljena za 1 cm, a od dulje 2 cm. Koliko je točka T udaljena od hipotenuze? Kolika je duljina visine na hipotenuzu?

4. (20) Ako je $a+b=1$, dokaži jednakost $\dfrac{a}{b^3-1} - \dfrac{b}{a^3-1} = \dfrac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

5. (20) Razlika dva neparna broja djeljiva je s 5. Kojom znamenkom završava razlika kubova tih brojeva?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

1. (20) Odredi sve kompleksne brojeve z takve da su moduli brojeva z, $\frac{1}{z}$, $1-z$ jednaki.

2. (20) U skupu kompleksnih brojeva odredi sva rješenja jednadžbe

$$x^8 + 4x^6 - 10x^4 + 4x^2 + 1 = 0.$$

3. (20) Pojednostavni izraz

$$-x^{-x^{-x}}\left(\frac{x^{-x^{x}} + x^{x^{-x}}}{x^{-x^{-x}} + x^{x^{x}}}\right)$$

za $x > 0$.

4. (20) Dvije kružnice duljina promjera 6 cm i 18 cm diraju se izvana. Izračunaj površinu lika omeđenog kružnicama i njihovom zajedničkom vanjskom tangentom.

5. (20) Duljina stranice kvadrata je 6 cm. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ zadane su točke K i L takve da je $|AK| = 2$ cm i $|AL| = 3$ cm. Kvadratu je upisan trapez s osnovicom $\overline{KL}$. Kolika je najveća moguća površina upisanog trapeza?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

1. (20) Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je c, a duljina simetrale jednog od šiljastih kutova je $\dfrac{c\sqrt{3}}{3}$. Kolike su duljine kateta?

2. (20) Riješi nejednadžbu

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2(16x) < 1.$$

3. (20) Od kocke duljine brida 3 cm odsječeno je svih osam vrhova tako da novo tijelo ima sve bridove jednakih duljina. Koliki je volumen novonastalog tijela?

4. (20) Izračunaj zbroj

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 90^\circ.$$

5. (20) Duljine visina trokuta ABC odnose se kao $v_a : v_b : v_c = 6 : 2\sqrt{3} : 3$, a opseg opisane mu kružnice iznosi 8π cm. Odredi duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

1. (20) Riješi sustav jednadžbi (u skupu prirodnih brojeva)

$$\begin{cases} \binom{x}{y} = \binom{x}{y+2}, \\ \binom{x}{2} = 153. \end{cases}$$

2. (20) U jednakokračnom trokutu ABC ($|AC| = |BC|$) točka D je polovište baze $\overline{AB}$, dužina $\overline{DE}$ je visina trokuta DBC, a M polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da su pravci AE i CM međusobno okomiti.

3. (20) Svaka stranica kvadrata, duljine a, podijeljena je u omjeru $1 : x$ ($x > 1$). Dobivene točke su vrhovi novog kvadrata upisanog polaznom. Isti postupak se nastavlja sa svakim novim kvadratom. Koliki je zbroj površina polaznog i svih tako dobivenih kvadrata?

4. (20) Veličine kutova $\alpha < \beta < \gamma$ trokuta uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a duljine njegovih stranica su a, b, c. Dokaži jednakost $(a + c)^2 = b^2 + 3ac$.

5. (20) Pravac kroz ishodište siječe pravce dane jednadžbama $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ u točkama A i B. Odredi geometrijsko mjesto polovišta dužina $\overline{AB}$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

ISPRAVKA

U 3. zadatku za 3. razred B kategorije treba ispraviti formulaciju i treba biti kako je ovdje navedeno.

3. Od kocke duljine brida 3 cm odsječeno je svih osam vrhova tako da novo tijelo s 24 vrha ima sve bridove jednakih duljina. Koliki je volumen novonastalog tijela?

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

Zadatak B-1.1. (20 bodova) Odredi nepoznate znamenke a, b, c, d tako da vrijedi $\overline{a3bc} \cdot 45 = \overline{37d15b}$.

Rješenje. Broj na desnoj strani mora biti djeljiv s 5. Zato mora biti $b = 5$ ili $b = 0$.

(4 boda)

Za $b = 5$ je

$$\overline{a35c} \cdot 45 = \overline{37d155}.$$

Broj na desnoj strani mora biti djeljiv s 9 pa dobivamo $3 + 7 + d + 1 + 5 + 5 = 9k$ tj. $21 + d = 9k$, odakle je $d = 6$, pa je

$$\overline{a35c} \cdot 45 = 376155$$

odakle je $\overline{a35c} = 376155 : 45 = 8359$. Stoga je $a = 8$ i $c = 9$.

(8 bodova)

Za $b = 0$ imamo

$$\overline{a30c} \cdot 45 = \overline{37d150}.$$

Broj na desnoj strani mora biti djeljiv s 9 pa dobivamo $3 + 7 + d + 1 + 5 + 0 = 9k$ tj. $16 + d = 9k$, odakle je $d = 2$, pa je

$$\overline{a30c} \cdot 45 = 372150$$

odakle je $\overline{a30c} = 372150 : 45 = 8270$, što ne zadovoljava.

Dakle, postoji samo jedno rješenje $(a, b, c, d) = (8, 5, 9, 6)$

(8 bodova)

Zadatak B-1.2. (20 bodova)

U skupu realnih brojeva riješi jednadžbu

$$|x + 3| + 2\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 7.$$

Rješenje. Najprije uočimo $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, pa je $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x + 1|$. Jednadžba postaje $|x + 3| + 2|x + 1| = 7$.

(3 boda)

Treba promatrati tri slučaja:

1° $x \in \langle -\infty, -3\rangle$; 2° $x \in [-3, -1\rangle$; 3° $x \in [-1, \infty\rangle$

(2 boda)

1° $x \in \langle -\infty, -3\rangle$

$$\begin{aligned} -x-3-2x-2 &= 7 \\ x &= -4 \in \langle -\infty, -3\rangle \end{aligned}$$

(5 bodova)

2° $x \in [-3, -1\rangle$

$$\begin{aligned} x+3-2x-2 &= 7 \\ x &= -6 \notin [-3, -1\rangle \end{aligned}$$

(5 bodova)

3° $x \in [-1, \infty\rangle$

$$\begin{aligned} x+3+2x+2 &= 7 \\ x &= \frac{2}{3} \in [-1, \infty\rangle \end{aligned}$$

(5 bodova)

Jednadžba ima dva rješenja: $x = -4$, $x = \frac{2}{3}$.

Napomena. Ako učenik napiše $\sqrt{|x^2+2x+1|} = x+1$ dobit će treći slučaj, i ako nađe točan x dobiva 5 bodova.

Zadatak B-1.3. (20 bodova)

Duljine kateta pravokutnog trokuta su 8 cm i 6 cm. Unutar trokuta dana je točka T koja je od kraće katete udaljena za 1 cm, a od dulje 2 cm. Koliko je točka T udaljena od hipotenuze? Kolika je duljina visine na hipotenuzu?

Rješenje. Spojimo li točku T s vrhovima A, B, C dobivamo trokute ABT, BCT, CAT.

Tražena udaljenost x je duljina visine $\overline{TD}$ trokuta ABT. Neka je $a = |BC| = 8$ cm, $b = |CA| = 6$ cm. Visine trokuta BCT i CAT su redom 2 cm i 1 cm.

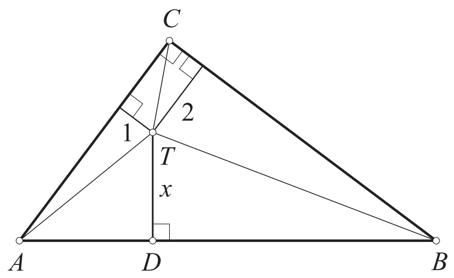
Duljina hipotenuze je $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8^2+6^2}$ cm $= \sqrt{100}$ cm $= 10$ cm. (1 bod)

Površinu trokuta ćemo izraziti na dva načina:

$$\frac{|BC| \cdot |CA|}{2} = P_{ABC} = P_{ABT} + P_{BCT} + P_{CAT}$$

(10 bodova)

Uvrstimo li poznate veličine dobivamo,



$$\frac{8 \cdot 6}{2}=\frac{10 \cdot x}{2}+\frac{8 \cdot 2}{2}+\frac{6 \cdot 1}{2}$$

iz čega imamo $x=\frac{26}{10}$ cm $=\frac{13}{5}$ cm $=2.6$ cm. (5 bodova)

Visinu na hipotenuzu ćemo također izračunati pomoću površina, tj. $\frac{ab}{2}=\frac{cv_c}{2}$, odakle dobivamo $8 \cdot 6=10 \cdot v_c$, tj. $v_c=\frac{48}{10}$ cm $=\frac{24}{5}$ cm $=4.8$ cm. (4 boda)

Zadatak B-1.4. (20 bodova)

Ako je $a+b=1$, dokaži jednakost $\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}$.

Rješenje. Rastavimo li nazivnike lijeve strane (razlika kubova!) dobivamo

$$\frac{a}{(b-1)(b^2+b+1)}-\frac{b}{(a-1)(a^2+a+1)} \qquad (1)$$

(3 boda)

Iz $a+b=1$ imamo $b-1=-a$, $a-1=-b$, (2 boda)

pa izraz (1) postaje

$$\frac{-1}{b^2+b+1}+\frac{1}{a^2+a+1}=\frac{b^2-a^2+b-a}{a^2b^2+ab^2+a^2b+a^2+ab+b^2+a+b+1}$$

(7 bodova)

Sada dobivamo, uz $a+b=1$,

$$\begin{aligned}\frac{(b-a)(b+a)+b-a}{a^2b^2+ab(a+b)+a^2+ab+b^2+a+b+1} &= \frac{2(b-a)}{a^2b^2+a^2+2ab+b^2+1+1}\\ &= \frac{2(b-a)}{a^2b^2+(a+b)^2+2}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.\end{aligned}$$

(8 bodova)

Zadatak B-1.5. (20 bodova)

Razlika dva neparna broja djeljiva je s 5. Kojom znamenkom završava razlika kubova tih brojeva?

Rješenje. Označimo te brojeve s $a = 2m - 1$, $b = 2n - 1$. Njihova razlika je

$$a - b = 2(m - n).$$

(5 bodova)

Kako je razlika djeljiva s 5 i s 2, ona je djeljiva s 10, tj. $a - b = 10k$. (5 bodova)

Rastavom na faktore razlike kubova $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ dobivamo $a^3 - b^3 = 10k(a^2 + ab + b^2)$, pa je $a^3 - b^3$ djeljivo s 10, odnosno razlika kubova završava s 0.

(10 bodova)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

Zadatak B-2.1. (20 bodova) Odredi sve kompleksne brojeve z takve da su moduli brojeva z, $\frac{1}{z}$, $1-z$ jednaki.

Rješenje. Prema uvjetu zadatka je $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$

Iz jednakosti $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$ dobivamo $|z| = 1$, a zatim iz $|z| = |1-z|$ slijedi $|1-z| = 1$.

Označimo li $z = x + iy$ imamo $x^2 + y^2 = 1$ i $(1-x)^2 + y^2 = 1$. (5 bodova)

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobiva se $x = \frac{1}{2}$.

Nadalje, $y^2 = 1 - x^2 = \frac{3}{4}$, odakle je $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. (10 bodova)

Traženi kompleksni brojevi su $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ i $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(5 bodova)

Zadatak B-2.2. (20 bodova) U skupu kompleksnih brojeva odredi sva rješenja jednadžbe

$$x^8 + 4x^6 - 10x^4 + 4x^2 + 1 = 0.$$

Rješenje. Kako 0 nije rješenje, dijeljenjem jednadžbe s x^4 dobivamo

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 - 10 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} &= 0, \\ \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Supstitucijom $t = x^2 + \frac{1}{x^2}$, dobivamo $t^2 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$, pa jednadžba postaje

$$t^2 + 4t - 12 = 0,$$

čija rješenja su $t_1 = -6$ i $t_2 = 2$. (8 bodova)

Za $t_1 = -6$ imamo:

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{1}{x^2} &= -6\\
u &= x+\frac{1}{x} \qquad \text{(supstitucija)}\\
u^2 &= x^2+2+\frac{1}{x^2}=-4\\
u_{1,2} &= \pm 2i
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl}
x+\dfrac{1}{x}=2i & \quad x+\dfrac{1}{x}=-2i\\
x^2-2ix+1=0 & \quad x^2+2ix+1=0\\
x_{1,2}=(1\pm\sqrt{2})i & \quad x_{3,4}=-(1\pm\sqrt{2})i
\end{array}$$

(6 bodova)

Za $t_2=2$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{1}{x^2} &= 2\\
x^4-2x^2+1 &= 0\\
(x^2-1)^2 &= 0\\
x_{5,6}=1 & \qquad x_{7,8}=-1.
\end{aligned}$$

(4 boda)

Rješenja jednadžbe su $x\in\{\pm1,\ \pm(1\pm\sqrt{2})i\}$. (2 boda)

Zadatak B-2.3. (20 bodova) Pojednostavni izraz

$$-x^{-x^{-x}}\left(\frac{x^{-x^{x}}+x^{x^{-x}}}{x^{-x^{-x}}+x^{x^{x}}}\right)$$

za $x>0$.

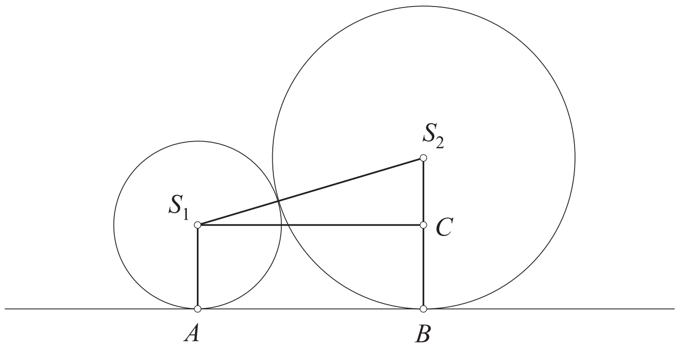
Rješenje. Supstitucijom $x^x=u$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
-x^{-x^{-x}}\left(\frac{x^{-x^{x}}+x^{x^{-x}}}{x^{-x^{-x}}+x^{x^{x}}}\right) &= -x^{-\frac{1}{u}}\cdot\frac{\dfrac{1}{x^u}+x^{\frac{1}{u}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{u}}}+x^u}\\
&= -x^{-\frac{1}{u}}\cdot\frac{\dfrac{1+x^u x^{\frac{1}{u}}}{x^u}}{\dfrac{1+x^u x^{\frac{1}{u}}}{x^{\frac{1}{u}}}}\\
&= -x^{-\frac{1}{u}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{u}}}{x^u}=-\frac{1}{x^u}=-x^{-u}=-x^{-x^{x}}
\end{aligned}$$

(20 bodova)

Zadatak B-2.4. (20 bodova) Dvije kružnice duljina promjera 6 cm i 18 cm diraju se izvana. Izračunaj površinu lika omeđenog kružnicama i njihovom zajedničkom vanjskom tangentom.

Rješenje. Kako je $|S_1S_2| = 12$, $|CS_2| = 6$ i trokut S_1CS_2 je pravokutan, on je jednak polovini jednakostraničnog pa je $\sphericalangle S_1S_2C = 60^\circ$. (4 boda)



Od površine P_1 trapeza ABS_2S_1 treba oduzeti površinu P_2 kružnog isječka na malom krugu sa središnjim kutom od 120° i površinu kružnog isječka P_3 na velikom krugu sa središnjim kutom od 60°.

Stoga imamo

$$P_1 = \frac{|AS_1| + |BS_2|}{2} \cdot |S_1C| = \frac{3+9}{2} \cdot \sqrt{12^2 - 6^2} \text{ cm}^2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2,$$

(4 boda)

$$P_2 = \frac{3^2\pi \cdot 120^\circ}{360^\circ} \text{ cm}^2 = 3\pi \text{ cm}^2,$$

(4 boda)

$$P_3 = \frac{9^2\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} \text{ cm}^2 = \frac{27\pi}{2} \text{ cm}^2.$$

(4 boda)

Odavde dobivamo

$$P = P_1 - P_2 - P_3 = \left(36\sqrt{3} - \frac{33\pi}{2}\right) \text{ cm}^2$$

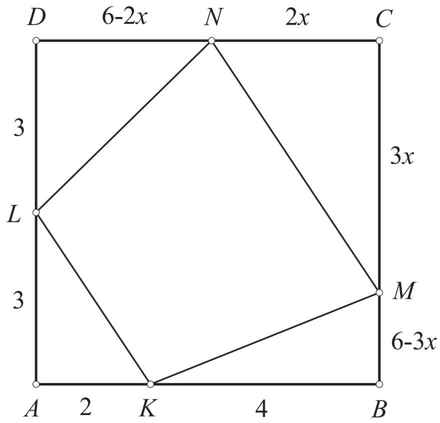
(4 boda)

Zadatak B-2.5. (20 bodova) Duljina stranice kvadrata je 6 cm. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ zadane su točke K i L takve da je $|AK| = 2$ cm i $|AL| = 3$ cm. Kvadratu je upisan trapez s osnovicom $\overline{KL}$. Kolika je najveća moguća površina upisanog trapeza?

Rješenje. Označimo vrhove osnovice trapeza s M i N. Trokuti AKL i CNM su slični ($\sphericalangle AKL = \sphericalangle CNM$).

Označimo li duljine stranica $\overline{CN}$ i $\overline{CM}$ s $2x$ i $3x$, površinu P trapeza možemo prikazati kao razliku površine kvadrata $ABCD$ i četiri trokuta AKL, BMK, CNM, DLN.

(4 boda)



$$
\begin{aligned}
P &= 36 - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot (6-3x)}{2} - \frac{3x \cdot 2x}{2} - \frac{3 \cdot (6-2x)}{2} \\
&= -3x^2 + 9x + 12.
\end{aligned}
$$

(8 bodova)

Kvadratna funkcija $f(x) = -3x^2 + 9x + 12$ poprima maksimum za $x = \dfrac{-9}{2 \cdot (-3)} = \dfrac{3}{2}$.

(6 bodova)

Dakle, $P_{\max} = -3 \cdot \dfrac{9}{4} + 9 \cdot \dfrac{3}{2} + 12 = \dfrac{75}{4}$. (2 boda)

(Ili iz $f(x) = -3\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{75}{4}$ slijedi $P_{\max} = \dfrac{75}{4}$.)

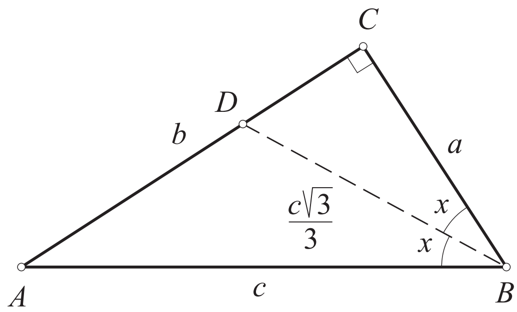
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

Zadatak B-3.1. (20 bodova) Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je c, a duljina simetrale jednog od šiljastih kutova je $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Kolike su duljine kateta?

Prvo rješenje. Iz slike imamo $a = c\cos 2x = \frac{c\sqrt{3}}{3}\cos x$. (3 boda)



Iz dobivene jednakosti dobivamo jednadžbu $\sqrt{3}\cos 2x = \cos x$ ili nakon sređivanja $2\sqrt{3}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{3} = 0$. (6 bodova)

Njena rješenja su $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ovo drugo rješenje ne odgovara jer je $x < 90°$). (6 bodova)

Iz $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dobivamo duljine kateta $\frac{c}{2}$ i $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. (5 bodova)

Drugo rješenje. Površina trokuta ABC je jednaka zbroju površina trokuta BCD i BDA. Uz $a = c\cos 2x$ i $b = c\sin 2x$ dobivamo:

$$\frac{ab}{2} = \frac{a \cdot \frac{c\sqrt{3}}{3}}{2}\sin x + \frac{c \cdot \frac{c\sqrt{3}}{3}}{2}\sin x,$$

i nadalje

$$c^2 \sin 2x \cos 2x = c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x \cos 2x + c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\sin x.$$

(6 bodova)

Dijeljenjem s c^2, uz $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, dobivamo

$$\sin x(\cos 2x + 1 - 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x) = 0.$$

Kako je $\sin x \neq 0$ imamo jednadžbu

$$\cos 2x + 1 - 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x = 0 \qquad \text{tj.} \qquad 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x \cos 2x = 0.$$

(6 bodova)

Budući je $\cos x \neq 0$ dobivamo jednadžbu iz prvog rješenja. (8 bodova)

Zadatak B-3.2. (20 bodova) Riješi nejednadžbu

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2(16x) < 1.$$

Rješenje. Da bi nejednadžba imala smisla mora biti zadovoljeno

$$x > 0, \quad x \neq 1 \quad \text{i} \quad x \neq \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2(2x)} \cdot \log_2(16x) &< 1, \\ \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1+\log_2 x} \cdot (4+\log_2 x) &< 1. \end{aligned}$$

(5 bodova)

Uz supstituciju

$$\log_2 x = t, \qquad (2)$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{4+t}{t(1+t)} &< 1 \\ \frac{4-t^2}{t(1+t)} &< 0. \end{aligned}$$

(7 bodova)

Rješenje ove nejednadžbe je

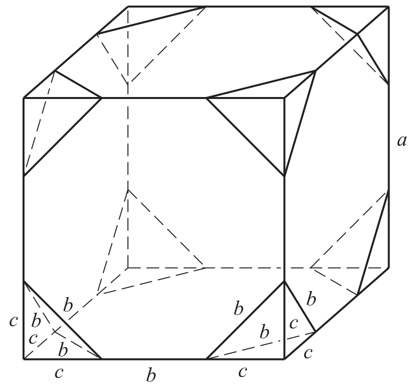
$$t \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle. \qquad (3)$$

(3 boda)

Iz (1), (2) i (3) dobivamo $x \in \left\langle 0, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$.

(5 bodova)

Zadatak B-3.3. (20 bodova) Od kocke duljine brida 3 cm odsječeno je svih osam vrhova tako da novo tijelo ima sve bridove jednakih duljina. Koliki je volumen novonastalog tijela?



Rješenje. Iz jednadžbi $b+2c=a$ i $b=c\sqrt{2}$ dobivamo $c=\dfrac{3(2-\sqrt{2})}{2}$ cm. (4 boda)

Volumen svakog od osam tetraedara je

$$V_T=\frac{c^3}{6}=\frac{9(10-7\sqrt{2})}{8}\text{ cm}^3.$$

(6 bodova)

Volumen kocke je $V_K=a^3=27$ cm^3. (4 bodova)

Konačno, volumen tijela je

$$V=V_K-8\cdot V_T=63(\sqrt{2}-1)\text{ cm}^3.$$

(6 bodova)

Zadatak B-3.4. (20 bodova) Izračunaj zbroj

$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ.$$

Rješenje. Primjenjujući relaciju $\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$ dobivamo:

$$\sin^2 1^\circ=\cos^2 89^\circ,\ \sin^2 2^\circ=\cos^2 88^\circ,\ldots,\sin^2 44^\circ=\cos^2 46^\circ.$$

(6 bodova)

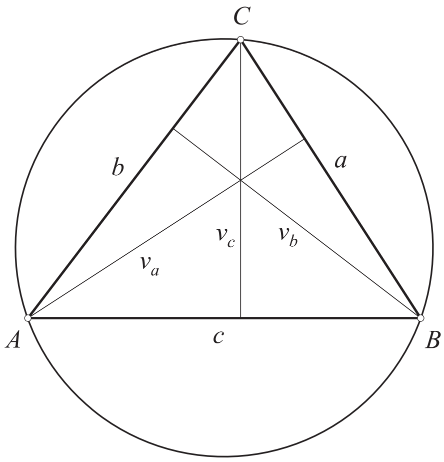
Odavde je

$$\begin{aligned}
&\sin^2 1^\circ+\ldots+\sin^2 44^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 46^\circ+\ldots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ\\
=\ &\cos^2 89^\circ+\ldots+\cos^2 44^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 46^\circ+\ldots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ\\
=\ &44\cdot 1+\frac{1}{2}+1=45.5.
\end{aligned}$$

(14 bodova)

Zadatak B-3.5. (20 bodova) Duljine visina trokuta ABC odnose se kao $v_a:v_b:v_c=6:2\sqrt{3}:3$, a opseg opisane mu kružnice iznosi 8π cm. Odredi duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC.

Rješenje. Iz $av_a = bv_b$ dobivamo $a : b = v_b : v_a = 2\sqrt{3} : 6 = 1 : \sqrt{3}$, a iz $b : c = v_c : v_b = 3 : 2\sqrt{3} = \sqrt{3} : 2$ tj. $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$. Neka je $a = k$, $b = \sqrt{3}k$, $c = 2k$. (4 boda)



Sada je

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3k^2 + 4k^2 - k^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2k^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

odakle je $\alpha = 30°$, (4 boda)

a iz

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{k^2 + 4k^2 - 3k^2}{2 \cdot 1 \cdot 2k^2} = \frac{1}{2},$$

slijedi $\beta = 60°$. (4 boda)

Odavde dobivamo $\gamma = 90°$, tj. trokut je pravokutan. Polumjer opisane kružnice je $r = \dfrac{c}{2}$, a kako je njezin opseg $8\pi = 2r\pi$ dobivamo $r = 4$ i $c = 8$. (4 boda)

Iz $8 = 2k$ dobivamo $k = 4$, odnosno $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$. (4 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

23. veljače 2009.

Zadatak B-4.1. (20 bodova) Riješi sustav jednadžbi (u skupu prirodnih brojeva)

$$\begin{cases} \binom{x}{y} &= \binom{x}{y+2}, \\ \binom{x}{2} &= 153. \end{cases}$$

Rješenje. Iz $\binom{x}{2} = 153$ dobivamo $\frac{x(x-1)}{2} = 153$ tj. $x^2 - x - 306 = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = 18$, $x_2 = -17$. Kako tražimo samo rješenja u skupu prirodnih brojeva, moguće je jedino $x_1 = 18$. (10 bodova)

Prvi način. Sada iz prve jednadžbe imamo

$$\binom{18}{y} = \binom{18}{y+2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{18!}{(18-y)!y!} = \frac{18!}{(16-y)!(y+2)!},$$

odnosno

$$\begin{aligned} (18-y)(17-y) &= (y+1)(y+2) \\ 38y &= 304, \end{aligned}$$

tj. $y = 8$. (10 bodova)

Drugi način. Iz svojstva simetrije binomnih koeficijenata slijedi

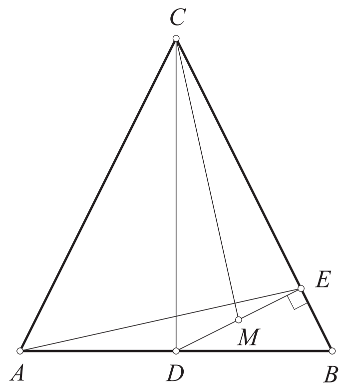
$$y + y + 2 = x$$

iz čega je $y = 8$.

Zadatak B-4.2. (20 bodova) U jednakokračnom trokutu ABC ($|AC| = |BC|$) točka D je polovište baze $\overline{AB}$, dužina $\overline{DE}$ je visina trokuta DBC, a M polovište dužine $\overline{DE}$. Dokaži da su pravci AE i CM međusobno okomiti.

Rješenje. Iz slike imamo:
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}$.

Dovoljno je pokazati da je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{CM}$ jednak nuli. (5 bodova)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CM} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DM})\\
&= \underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}_{=0}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DM}+\underbrace{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DM}}_{=0}\\
&= \overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{DM}\cdot(2\overrightarrow{DB}) = (\text{uz } 2\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DE})\\
&= \underbrace{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}}_{=0}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}\\
&= \overrightarrow{DE}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB} = 0.
\end{aligned}
$$

(15 bodova)

Zadatak B-4.3. (20 bodova) Svaka stranica kvadrata, duljine a, podijeljena je u omjeru $1:x$ $(x>1)$. Dobivene točke su vrhovi novog kvadrata upisanog polaznom. Isti postupak se nastavlja sa svakim novim kvadratom. Koliki je zbroj površina polaznog i svih tako dobivenih kvadrata?

Rješenje. Površina polaznog kvadrata je $P_1 = a^2$;

Neka je $|AH| = |EB| = k$. Tada je $|AE| = |BF| = kx$. Budući je $|AE|+|EB| = a$ dobije se $kx+k=a$ tj. $k = \dfrac{a}{x+1}$. Stranicu $a_2 = |EH|$ nalazimo pomoću Pitagorinog poučka tj.

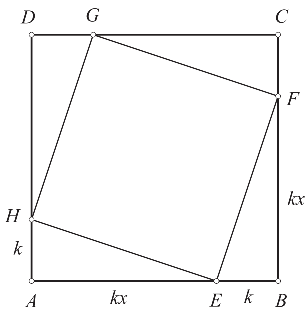
$$a_2^2 = |AE|^2+|AH|^2 = (kx)^2+k^2 = k^2(x^2+1) = \frac{a^2(x^2+1)}{(x+1)^2}.$$

Površina upisanog kvadrata je $P_2 = a_2^2 = \dfrac{a^2(x^2+1)}{(x+1)^2}$;

Površina novog upisanog kvadrata je $P_3 = a_3^2 = \dfrac{a^2(x^2+1)}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{(x^2+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{a^2(x^2+1)^2}{(x+1)^4}$.

Postupak se analogno nastavlja. (8 bodova)

Zbroj površina svih kvadrata je



$$P = a^2 + \frac{a^2(x^2+1)}{(x+1)^2} + \frac{a^2(x^2+1)^2}{(x+1)^4} + \frac{a^2(x^2+1)^3}{(x+1)^6} + \ldots$$

(4 boda)

Traženi zbroj površina je suma geometrijskog reda s kvocijentom $q = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1} < 1$, radi čega red konvergira.

(3 boda)

Kako je prvi član jednak a^2, tražena površina je jednaka

$$P = \frac{a^2}{1-q} = \frac{a^2}{1 - \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}} = a^2 \cdot \frac{(x+1)^2}{2x}.$$

(5 bodova)

Zadatak B-4.4. (20 bodova) Veličine kutova $\alpha < \beta < \gamma$ trokuta uzastopni su članovi aritmetičkog niza, a duljine njegovih stranica su a, b, c. Dokaži jednakost $(a+c)^2 = b^2 + 3ac$.

Rješenje. Kako su kutovi trokuta α, β, γ uzastopni članovi aritmetičkog niza, vrijedi $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$. (5 bodova)

Suma kutova trokuta je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, iz čega slijedi $\beta + 2\beta = 180°$ tj. $\beta = 60°$.

(5 bodova)

Primijenimo sada poučak o kosinusu:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60° = a^2 + c^2 - ac \quad \text{tj.} \quad a^2 + c^2 = b^2 + ac.$$

(5 bodova)

Tada je $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2 = b^2 + 3ac$. (5 bodova)

Zadatak B-4.5. (20 bodova) Pravac kroz ishodište siječe pravce dane jednadžbama $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ u točkama A i B. Odredi geometrijsko mjesto polovišta dužina $\overline{AB}$.

Rješenje. Jednadžba pravca koji prolazi ishodištem je $y = kx$.

Sjecište tog pravca s pravcem $x + y - 1 = 0$ dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi

$$y = kx, \qquad y = -x + 1.$$

Sjecište je točka $A\left(\dfrac{1}{1+k}, \dfrac{k}{1+k}\right)$.

Sjecište s pravcem $x - y - 1 = 0$ dobivamo rješavanjem ovog sustava jednadžbi

$$y = kx, \qquad y = x - 1.$$

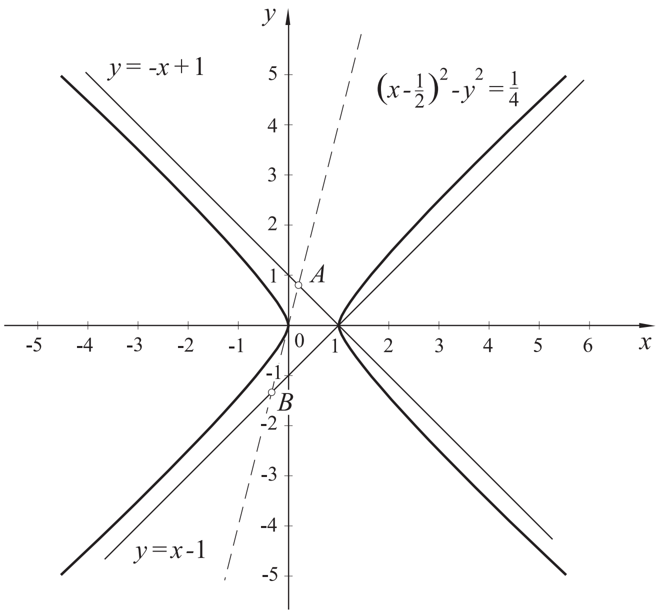
Drugo sjecište je $B\left(\dfrac{1}{1-k}, \dfrac{k}{1-k}\right)$. (5 bodova)

Polovište dužine $\overline{AB}$ je

$$P\left(\frac{\frac{1}{1+k}+\frac{1}{1-k}}{2}, \frac{\frac{k}{1+k}+\frac{k}{1-k}}{2}\right) = P\left(\frac{1}{1-k^2}, \frac{k}{1-k^2}\right).$$

(3 boda)

Koordinate točke P su $x = \dfrac{1}{1-k^2}$, $y = \dfrac{k}{1-k^2}$.



Promatrajmo sada razliku $x^2 - y^2$:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = \frac{1-k}{1-k^2} \cdot \frac{1+k}{1-k^2} = \frac{1}{1-k^2} = x.$$

Dobili smo jednadžbu $x^2 - x - y^2 = 0$ (5 bodova)

koju možemo preurediti u $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \dfrac{1}{4}$. (3 boda)

Traženo geometrijsko mjesto točaka je hiperbola dana ovom jednadžbom. (4 boda)

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. (20) "Tomislav i ja", reče Krešimir, "možemo završiti posao za 20 dana". No, ako bih radio s Ivanom posao bismo obavili za 5 dana ranije."

"Imam bolju kombinaciju!" reče Ivan. Ako bih radio s Tomislavom završio bih posao za petinu vremena prije nego da radim s Krešimirom."

Za koliko bi dana svaki od njih završio posao sam, a za koliko bi ga dana završili radeći svi zajedno?

2. (20) Riješi nejednadžbu

$$|||9-x|-x|+2x| \leq 2009.$$

3. (20) Duljina osnovice jednakokračnog trokuta ABC je 12 cm, a duljina kraka je 10 cm. Točke P i Q su polovišta krakova $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, a S i R su njihove ortogonalne projekcije na $\overline{AB}$. Odredi udaljenost nožišta okomica iz točaka P i R na spojnicu $\overline{SQ}$.

4. (20) Ako je $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ i $ac+bd=0$, koliko je $ab+cd$?

5. (20) Ako realni brojevi $x,\ y$ zadovoljavaju uvjet $2x+4y=1$ dokaži nejednakost $x^2+y^2 \geq \dfrac{1}{20}$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. (20) Za kompleksne brojeve z, w takve da je $|z| = |w| = |z - w|$ izračunaj $\left(\frac{z}{w}\right)^{99}$.

2. (20) Dani su realni brojevi $0 < a < b$. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} \leq 2.$$

3. (20) U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$, točka E je polovište dužine $\overline{CD}$, a točka F je sjecište pravaca AE i BC. Ako je $|AD| = 4$ i $|BD| = 9$, odredi duljinu dužine $\overline{AF}$.

4. (20) Točke A, B i C leže na istom pravcu i B je između A i C. S iste strane pravca AC konstruirane su tri polukružnice promjera $|AB| = 2R$, $|BC| = 2r$ i $|AC|$. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje sve tri polukružnice.

5. (20) Nađi sva rješenja jednadžbe $\lfloor x \rfloor \{x\} = 2009x$, gdje je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od x, a $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. (20) Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$4x^3 - \sqrt{1-x^2} - 3x = 0.$$

2. (20) Za realan broj $a > 0,\ a \neq 1$ dana je funkcija

$$f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x.$$

U zavisnosti o parametru a nađi sva rješenja jednadžbe

$$f(x + a^2 - a) = 2f(x).$$

3. (20) Izračunaj zbroj

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \ldots + \frac{\sin 1}{\cos 2008 \cdot \cos 2009}.$$

4. (20) Međusobna udaljenost središta sfera polumjera R i r ($r < R$) jednaka je a ($R - r < a \leq R + r$).

   a) Izrazi obujam V pravilnog kružnog stošca, opisanog oko ovih sfera, u zavisnosti o parametrima a, R i r.

   b) Izračunaj volumen stošca ako je $R = 10$, $r = 6$ i $a = 8$.

5. (20) Dvije jednake šahovske ploče (8×8 polja) imaju zajedničko središte i jedna potpuno prekriva drugu. Jedna od njih se zarotira oko središta za $45°$. Odredi površinu presjeka svih crnih polja jedne ploče sa svim crnim poljima druge ploče ako je površina jednog polja jednaka 1.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. (20) U rastućem aritmetičkom nizu umnožak drugog i trećeg člana je 3, a umnožak trećeg i petog je -3. Koliko prvih članova niza treba zbrojiti da bi zbroj bio minimalan? Koliki je taj zbroj?

2. (20) U Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane su točke $A\left(-\frac{17}{2}, 0\right)$, $B(2,0)$, $C(-1,0)$. Nađi sve točke pravca $y = x - 3$ iz koje se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ vide pod istim kutom različitim od nule.

3. (20) Koliki su minimum i maksimum funkcije

$$y = \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}?$$

Za koje $x \in [0, 2\pi]$ funkcija poprima minimalnu, a za koje maksimalnu vrijednost?

4. (20) Nađi formulu za zbroj

$$S_n = \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \frac{5}{3! + 4! + 5!} + \ldots + \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}.$$

Pokaži da niz zbrojeva konvergira i odredi mu limes!

5. (20) Kocka $ABCDA'B'C'D'$ presječena je ravninom koja sadrži prostornu dijagonalu kocke $\overline{BD'}$ i ima najmanju moguću površinu presjeka s kockom. Koliki je kosinus kuta između te ravnine i ravnine $ABCD$?

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-1.1. (20 bodova) ”Tomislav i ja”, reče Krešimir, ”možemo završiti posao za 20 dana”. No, ako bih radio s Ivanom posao bismo obavili za 5 dana ranije.”

”Imam bolju kombinaciju!” reče Ivan. Ako bih radio s Tomislavom završio bih posao za petinu vremena prije nego da radim s Krešimirom.”

Za koliko bi dana svaki od njih završio posao sam, a za koliko bi ga dana završili radeći svi zajedno?

Rješenje. Označimo s x, y, z, tim redom, broj dana za koje bi posao obavili Tomislav, Krešimir, Ivan. Ako ukupni posao označimo s 1 onda je $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ dio posla koji bi obavili, tim redom, Tomislav, Krešimir, Ivan, za jedan dan. Prema uvjetu zadatka imamo sljedeće jednažbe:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} & = & \dfrac{1}{20}, \\[2ex] \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} & = & \dfrac{1}{15}, \\[2ex] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z} & = & \dfrac{1}{12}. \end{array}\right.$$

Treba riješiti ovaj sistem linearnih jednadžbi.

Zbrajanjem ovih triju jednadžbi, nakon sređivanja, dobivamo

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}.$$

Radeći zajedno u jednom danu bi obavili $\frac{1}{10}$ ukupnog posla, tj. cjelokupan posao bi obavili za 10 dana.

Sada imamo:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30} \quad \text{tj.} \quad x=30.$$

Slično se dobiva $y=60$, $z=20$. Dakle, Tomislav bi obavio cjelokupan posao za 30, Krešimir za 60, a Ivan za 20 dana.

Zadatak B-1.2. (20 bodova) Riješi nejednadžbu

$$|||9-x|-x|+2x| \leq 2009.$$

Rješenje. Da bismo riješili ovu nejednadžbu moramo riješiti sljedeće dvije jednostavnije nejednadžbe:

$$\begin{gathered}-2009 \leq ||9-x|-x|+2x \leq 2009, \quad \text{tj.} \\ -2009-2x \leq ||9-x|-x| \leq 2009-2x.\end{gathered}$$

Moramo promatrati dva slučaja:

$1^\circ \quad 9-x \leq 0 \quad$ tj. $\quad x \geq 9$,

$2^\circ \quad 9-x > 0 \quad$ tj. $\quad x < 9$.

1° U ovom slučaju imamo:

$$\begin{gathered}-2009-2x \leq |x-9-x| \leq 2009-2x, \\ -2018 \leq 2x \leq 2000, \\ -1009 \leq x \leq 1000,\end{gathered}$$

odakle imamo $x \in [9, 1000]$

2° Sada je

$$-2009-2x \leq |9-2x| \leq 2009-2x,$$

pa imamo ova dva slučaja:

$2^\circ a \quad 9-2x \leq 0$ tj. $x \geq \dfrac{9}{2} \quad$ tj. $\quad x \in \left[\dfrac{9}{2}, 9\right\rangle$,

$2^\circ b \quad 9-2x > 0 \quad$ tj. $\quad x < \dfrac{9}{2}$.

$2^\circ a$

$$\begin{gathered}-2009-2x \leq 2x-9 \leq 2009-2x, \\ -2000 \leq 4x \leq 2018, \\ -500 \leq x \leq \frac{1009}{2},\end{gathered}$$

odakle je $x \in \left[\dfrac{9}{2}, 9\right\rangle$.

$2^\circ b$

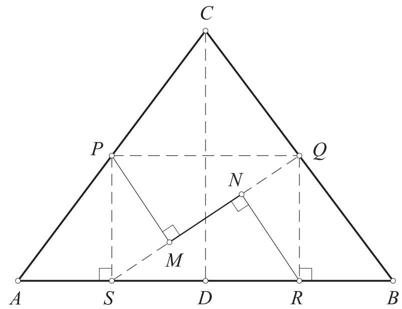
$$-2009-2x < 9-2x < 2009-2x \quad \text{tj.} \quad -2018 < 2000.$$

Kako je ova nejednakost uvijek zadovoljena dobivamo $x \in \left\langle -\infty, \dfrac{9}{2}\right\rangle$.

Konačno rješenje je $x \in \langle -\infty, 1000]$.

Zadatak B-1.3. (20 bodova) Duljina osnovice jednakokračnog trokuta ABC je 12 cm, a duljina kraka je 10 cm. Točke P i Q su polovišta krakova $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, a S i R su njihove ortogonalne projekcije na $\overline{AB}$. Odredi udaljenost nožišta okomica iz točaka P i R na spojnicu $\overline{SQ}$.

Rješenje. Dužina $\overline{PQ}$ je srednjica trokuta ABC pa je $|PQ| = \dfrac{1}{2}|AB| = 6$ cm.



Točka D je polovište stranice $\overline{AB}$. Primjenom Pitagorinog poučka imamo

$$|CD| = \sqrt{|BC|^2 - |BD|^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ cm}.$$

Točka Q je polovište kraka $\overline{BC}$ pa je $|BQ| = |CQ| = 5$ cm.

Iz sličnosti trokuta BDC i BRQ imamo $\dfrac{|CD|}{|QR|} = \dfrac{|BD|}{|BR|} = \dfrac{2}{1}$ odakle je $|QR| = \dfrac{|CD|}{2} = 4$ cm. Četverokut $SRQP$ je pravokutnik i $|SR| = |PQ| = 6$ cm. Duljina njegove dijagonale je

$$|SQ| = \sqrt{|SR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}.$$

Iz $P_{SRQ} = \dfrac{1}{2}P_{SRQP}$ imamo $|RN| = |PM| = \dfrac{P_{SRQP}}{|SQ|} = \dfrac{|SR| \cdot |QR|}{|SQ|} = \dfrac{12}{\sqrt{13}} = \dfrac{12\sqrt{13}}{13}$.

Nadalje, po Pitagorinom poučku je $|NQ| = \sqrt{|QR|^2 - |RN|^2} = \sqrt{16 - \dfrac{144}{13}} = \dfrac{8\sqrt{13}}{13}$.

Radi simetrije je $|SM| = |NQ|$ pa imamo $|MN| = |SQ| - 2|NQ| = \dfrac{10\sqrt{13}}{13}$.

Tražena udaljenost nožišta je $|MN| = \dfrac{10\sqrt{13}}{13}$ cm.

Zadatak B-1.4. (20 bodova) Ako je $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ i $ac + bd = 0$, koliko je $ab + cd$?

Prvo rješenje. Kako je $a^2 + b^2 = 1$ ne mogu istovremeno a i b biti jednaki 0. Neka je $a \neq 0$.

Iz treće jednakosti imamo $c = -\dfrac{bd}{a}$. Tada je

$$1 = c^2 + d^2 = \frac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = \frac{d^2(a^2 + b^2)}{a^2} = \frac{d^2}{a^2}$$

odakle imamo $a^2 = d^2$. Sada je

$$ab + cd = ab - \frac{bd^2}{a} = \frac{b}{a}(a^2 - d^2) = 0.$$

Drugo rješenje. Dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= (ac + bd)(ad + bc) \\ &= a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd \\ &= ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) \\ &= ab + cd. \end{aligned}$$

Zadatak B-1.5. (20 bodova) Ako realni brojevi x, y zadovoljavaju uvjet $2x + 4y = 1$ dokaži nejednakost $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

Prvo rješenje. Iz dane jednakosti imamo $x = \frac{1 - 4y}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \frac{1}{20} &= \left(\frac{1 - 4y}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{20} \\ &= \frac{1 - 10y + 25y^2}{5} = \frac{1}{5}(1 - 5y)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

odakle se dobiva tražena nejednakost.

Drugo rješenje. Kao i u prvom rješenju imamo $x = \frac{1 - 4y}{2}$. Dalje redom imamo:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{1 - 4y}{2}\right)^2 + y^2 = 5y^2 - 2y + \frac{1}{4} \\ &= 5\left(y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{1}{25}\right) + \frac{1}{20} = 5\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi tražena nejednakost.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-2.1. (20 bodova) Za kompleksne brojeve z, w takve da je $|z| = |w| = |z - w|$ izračunaj $\left(\frac{z}{w}\right)^{99}$.

Prvo rješenje. Stavimo $u = \dfrac{z}{w} = x + yi$. Tada je $|u| = 1$, $|u - 1| = 1$.

Tada je $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $u = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Sada je

$$\left(\frac{z}{w}\right)^{99} = u^{99} = \left[\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^{33} = \left(\frac{1}{8} \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}i - \frac{9}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}}{8}i\right)^{33} = (-1)^{33} = -1.$$

Drugo rješenje. Dijeljenjem dane jednakosti $|z| = |w| = |z - w|$ s $|w|$ dobivamo

$$\left|\frac{z}{w}\right| = 1 = \left|\frac{z}{w} - 1\right|.$$

Označimo li $u = \dfrac{z}{w}$ imamo $|u| = 1$, $|u - 1| = 1$.

Tada je $u \cdot \bar{u} = 1$ i $(u-1)(\bar{u} - 1) = 1$.

Odavde je $1 = (u-1)\left(\dfrac{1}{u} - 1\right) = -\dfrac{(u-1)^2}{u}$, a nakon sređivanja $u^2 = u - 1$.

Množenjem ove jednakosti s u imamo $u^3 = u^2 - u = -1$.

Sada imamo $u^{99} = (u^3)^{33} = (-1)^{33} = -1$.

Dakle, $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{99} = -1$.

Zadatak B-2.2. (20 bodova) Dani su realni brojevi $0 < a < b$. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} \leq 2.$$

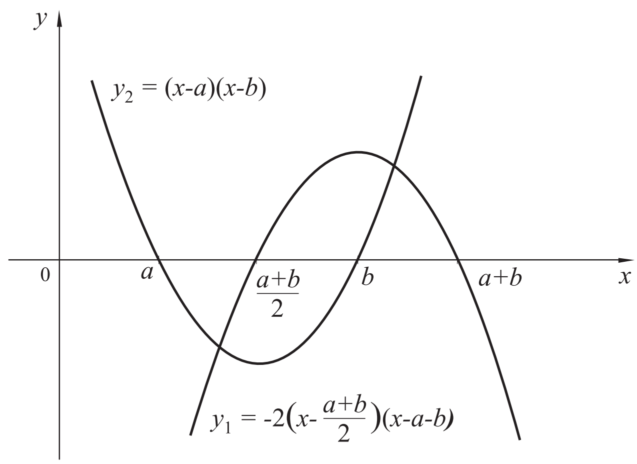
Prvo rješenje. Sređivanjem dane nejednakosti dobiva se

$$\frac{-2x^2 + (3a+3b)x - (a+b)^2}{(x-a)(x-b)} \leq 0.$$

Budući da su nultočke brojnika $x_1 = a+b$, $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$, a nazivnika $x_3 = a$, $x_4 = b$ te kako vrijedi

$$a < \frac{a+b}{2} < b < a+b$$

možemo skicirati grafove funkcija $y_1 = -2x^2 + (3a+3b)x - (a+b)^2$, odnosno, $y_2 = (x-a)(x-b)$



Kako izraz mora biti ≤ 0 promotrimo gdje su grafovi sa suprotnih strana x-osi. Pri tome je $x \neq a$, $x \neq b$. Dakle,

$$x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right\rangle \cup [a+b, \infty\rangle.$$

Drugo rješenje. Sređivanjem dane nejednakosti dobiva se

$$\frac{-2x^2 + (3a+3b)x - (a+b)^2}{(x-a)(x-b)} \leq 0.$$

Moramo promatrati sljedeća dva slučaja:

1°

$$\begin{aligned} -2x^2 + (3a+3b)x - (a+b)^2 &\leq 0 \\ (x-a)(x-b) &> 0 \end{aligned}$$

Rješenja jednadžbe $-2x^2 + (3a+3b)x - (a+b)^2 = 0$ su $x_1 = a+b$, $x_2 = \dfrac{a+b}{2}$.

Rješenje prve nejednadžbe je $x \in \left\langle -\infty, \dfrac{a+b}{2}\right] \cup [a+b, \infty\rangle$, a druge $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \langle b, \infty\rangle$

Kako je $0 < a < b$ imamo $a < \dfrac{a+b}{2}$, $b < a+b$, pa se dobiva $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup [a+b, \infty\rangle$.

2°

$$\begin{aligned} -2x^2+(3a+3b)x-(a+b)^2 &\geq 0 \\ (x-a)(x-b) &< 0 \end{aligned}$$

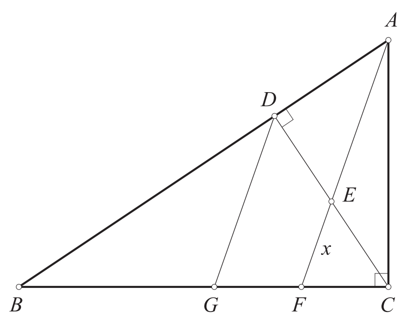
Rješenje prve nejednadžbe je $x \in \left[\frac{a+b}{2}, a+b\right]$, a druge $x \in \langle a, b\rangle$.

Rješenje sustava nejednadžbi pod 2° je $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right\rangle$.

Rješenje polaznog sustava nejednažbi je $x \in \langle -\infty, a\rangle \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right\rangle \cup [a+b, \infty\rangle$.

Zadatak B-2.3. (20 bodova) U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$, točka E je polovište dužine $\overline{CD}$, a točka F je sjecište pravaca AE i BC. Ako je $|AD| = 4$ i $|BD| = 9$, odredi duljinu dužine $\overline{AF}$.

Rješenje. Iz jednakosti $|CD|^2 = |AD| \cdot |BD|$ za pravokutan trokut ABC dobivamo $|CD| = 6$, a kako je E polovište dužine $\overline{CD}$, imamo $|DE| = 3$. Iz pravokutnog trokuta AED je $|AE| = 5$.



Neka je G točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $DG \parallel AF$. Kako je $\overline{EF}$ srednjica trokuta CDG, uz $|EF| = x$ vrijedi $|DG| = 2x$.

Iz sličnosti trokuta AFB i DGB slijedi jednakost $\frac{|AF|}{|DG|} = \frac{|AB|}{|DB|}$ tj. $\frac{5+x}{2x} = \frac{13}{9}$ odakle je $x = \frac{45}{17}$. Konačno je $|AF| = \frac{130}{17}$.

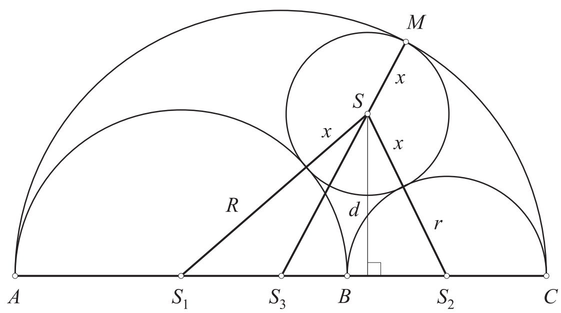
Zadatak B-2.4. (20 bodova) Točke A, B i C leže na istom pravcu i B je između A i C. S iste strane pravca AC konstruirane su tri polukružnice promjera $|AB| = 2R$, $|BC| = 2r$ i $|AC|$. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje sve tri polukružnice.

Rješenje. Neka je S središte kružnice, polumjera x, koja dodiruje tri polukružnice i neka je d njezina udaljenost od pravca AC.

Neka su S_1, S_2, S_3, tim redom, polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.

Sa slike dobivamo:

$$
\begin{aligned}
|S_1S_3| &= |AS_3| - |AS_1| = (R+r) - R = r,\\
|S_2S_3| &= |CS_3| - |CS_2| = (R+r) - r = R,\\
|S_1S| &= R + x,\\
|S_2S| &= r + x,\\
|S_3S| &= |S_3M| - |SM| = R + r - x.
\end{aligned}
$$



Površine trokuta S_1SS_3 i S_1SS_2 izrazit ćemo pomoću Heronove formule i pomoću osnovice i visine na nju:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(R+r)R(r-x)x} &= \frac{1}{2}rd,\\
\sqrt{(R+r+x)Rrx} &= \frac{1}{2}(R+r)d.
\end{aligned}
$$

Kvadriranjem ovih jednadžbi i dijeljenjem jedne s drugom, nakon sređivanja, dobiva se

$$x = \frac{Rr(R+r)}{R^2+Rr+r^2}.$$

Zadatak B-2.5. (20 bodova) Nađi sva rješenja jednadžbe $\lfloor x\rfloor\{x\} = 2009x$, gdje je $\lfloor x\rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od x, a $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Rješenje. Očito $x = 0$ zadovoljava jednadžbu.

Za $x > 0$ je $0 \leq \lfloor x\rfloor \leq x$, $0 \leq \{x\} < 1$, pa je $\lfloor x\rfloor\{x\} < x < 2009x$. U ovom slučaju nema rješenja.

Za $x < 0$ je $x = -p + \alpha$, gdje je $p = -\lfloor x\rfloor$ prirodan broj, a $\alpha = \{x\}$. Jednadžba sada glasi

$$(-p)\cdot\alpha = (-p+\alpha)\cdot 2009,$$

čije rješenje je $\alpha = \dfrac{2009p}{2009+p}$.

Kako je $\alpha < 1$, imamo $\dfrac{2009p}{2009+p} < 1$ tj. $p < \dfrac{2009}{2008}$. Zato je $p = 1$, $\alpha = \dfrac{2009}{2010}$ odakle je $x = -\dfrac{1}{2010}$.

Dakle, jednadžba ima dva rješenja: $x = 0$, $x = -\dfrac{1}{2010}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-3.1. (20 bodova) Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$4x^3 - \sqrt{1-x^2} - 3x = 0.$$

Prvo rješenje. Napišimo jednadžbu u obliku $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Da bi jednadžba bila definirana mora biti $1 - x^2 \geq 0$ tj. $x \in [-1, 1]$. Zato možemo staviti $x = \sin\alpha$, gdje je $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sada jednadžba postaje

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha \quad \text{tj.} \quad |\cos\alpha| = -\sin 3\alpha.$$

Za $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ je $\cos\alpha \geq 0$, pa jednadžba poprima oblik

$$\cos\alpha = -\sin 3\alpha \quad \text{tj.} \quad \sin 3\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0.$$

Lijevu stranu možemo napisati u obliku produkta:

$$2\sin\frac{3\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \cdot \cos\frac{3\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{2} = 0 \quad \text{tj.}$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Imamo dvije mogućnosti:

1° $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Opće rješenje ove jednadžbe je $\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

2° $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

čije je opće rješenje $\alpha = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Jednadžba ima tri rješenja u intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $-\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{8},\ \frac{3\pi}{8}$.

Rješenja polazne jednadžbe su:

$x_1 = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$x_2=\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$x_3=\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{4}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Drugo rješenje. Jednadžbu zapišimo u obliku $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$. Da bi ona bila definirana mora biti 1) $1-x^2\geq 0$, 2) $4x^3-3x=x(2x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})\geq 0$.

Prvi uvjet je zadovoljen za $x\in[-1,1]$, a drugi za $x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\infty\right\rangle$.

Oba uvjeta su zadovoljena za $x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

Kvadriranjem jednadžbe i sređivanjem dobivamo

$$16x^6-24x^4+10x^2-1=0.$$

Uz supstituciju $t=x^2$ imamo $16t^3-24t^2+10t-1=0$. Faktorizacijom dobivamo

$$(2t-1)(8t^2-8t+1)=0.$$

Jednadžba se svodi na sljedeće dvije:

1) Rješenje jednadžbe $2t-1=0$ je $t=\frac{1}{2}$. Zadovoljava samo $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Rješenja kvadratne jednadžbe $8t^2-8t+1=0$ su $t=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$. Odavde se dobije $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$. Zadovoljavaju samo rješenja $x_2=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ i $x_3=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
Time su dana sva tri rješenja polazne jednadžbe.

Zadatak B-3.2. (20 bodova) Za realan broj $a>0$, $a\neq 1$ dana je funkcija

$$f(x)=\log_a x+\log_{a^2} x.$$

U zavisnosti o parametru a nađi sva rješenja jednadžbe

$$f(x+a^2-a)=2f(x).$$

Rješenje. Da bi jednadžba imala rješenje moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$a>0,\quad a\neq 1,\quad x>0,\quad x>a-a^2.$$

Kako je $\log_{a^2} x=\frac{\log_a x}{\log_a a^2}=\frac{1}{2}\log_a x$ zadana funkcija je $f(x)=\frac{3}{2}\log_a x$.

Iz $f(x+a^2-a)=2f(x)$ dobivamo

$$\frac{3}{2}\log_a(x+a^2-a)=2\cdot\frac{3}{2}\log_a x \quad \text{tj.} \quad \log_a(x+a^2-a)=\log_a x^2. \tag{1}$$

Iz logaritamske jednadžbe (1) dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2-x+a-a^2=0$.

Riješimo ju faktorizacijom:

$$0=x^2-a^2-(x-a)=(x-a)(x+a)-(x-a)=(x-a)(x+a-1).$$

Njezina rješenja su $x_1=a$, $x_2=1-a$.

Prvo rješenje ima smisla za svaki pozitivan a osim za $a=1$, a drugo za $a\in\langle 0,1\rangle$.

Naime, za $x_1=a$ imamo $a>a-a^2$ tj. $a^2>0$, što je istinito za svaki a.

Za $x_2>0$ dobivamo $1-a>0$, odnosno $a\in\langle 0,1\rangle$ i za $x_2=1-a$ mora biti $1-a>a-a^2$ tj. $(a-1)^2>0$ pa je x za dopuštene a uvijek definiran.

Zadatak B-3.3. (20 bodova) Izračunaj zbroj

$$\frac{\sin 1}{\cos 0\cdot\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cdot\cos 2}+\frac{\sin 1}{\cos 2\cdot\cos 3}+\ldots+\frac{\sin 1}{\cos 2008\cdot\cos 2009}.$$

Rješenje. Uočimo n-ti član izraza $\dfrac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}$ i preuredimo ga

$$\begin{aligned}\frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n} &= \frac{\sin[n-(n-1)]}{\cos(n-1)\cos n}\\ &= \frac{\sin n\cos(n-1)}{\cos(n-1)\cos n}-\frac{\cos n\sin(n-1)}{\cos(n-1)\cos n}\\ &= \operatorname{tg} n-\operatorname{tg}(n-1).\end{aligned}$$

Sada zbroj postaje

$$\begin{aligned}&\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}0+\operatorname{tg}2-\operatorname{tg}1+\ldots+\operatorname{tg}2008-\operatorname{tg}2007+\operatorname{tg}2009-\operatorname{tg}2008\\ =\ &\operatorname{tg}2009-\operatorname{tg}0=\operatorname{tg}2009.\end{aligned}$$

Zadatak B-3.4. (20 bodova) Međusobna udaljenost središta sfera polumjera R i r ($r<R$) jednaka je a ($R-r<a\le R+r$).

a) Izrazi obujam V pravilnog kružnog stošca, opisanog oko ovih sfera, u zavisnosti o parametrima a, R i r.

b) Izračunaj volumen stošca ako je $R=10$, $r=6$ i $a=8$.

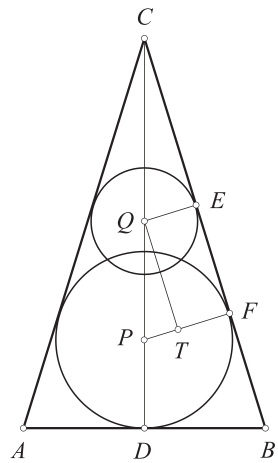
Rješenje. a) Neka je polumjer osnovke stošca $|BD| = x$, a visina $|CD| = y$. Točke E i F su na dužini $\overline{BC}$, T na $\overline{PF}$ i četverokut $QTFE$ je pravokutnik.

Iz sličnosti trokuta QEC i PTQ imamo $\frac{|QC|}{|QE|} = \frac{|PQ|}{|PT|}$, a odavde

$$\frac{y - R - a}{r} = \frac{a}{R - r}.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$y = \frac{(a + R - r)R}{R - r}. \tag{1}$$



Iz sličnosti trokuta BDC i PTQ imamo $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|PT|}{|QT|}$, odnosno

$$\frac{x}{y} = \frac{R - r}{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobivamo $x = y \cdot \frac{R - r}{\sqrt{a^2 - (R - r)^2}}$ tj.

$$x = R\sqrt{\frac{a + R - r}{a - R + r}}. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) imamo

$$V = \frac{x^2\pi \cdot y}{3} = \frac{R^3(a + R - r)^2\pi}{3(R - r)(a - R + r)}.$$

b) U specijalnom slučaju za $R = 10$, $r = 6$, $a = 8$ dobivamo $V = 3000\pi$.

Zadatak B-3.5. (20 bodova) Dvije jednake šahovske ploče (8×8 polja) imaju zajedničko središte i jedna potpuno prekriva drugu. Jedna od njih se zarotira oko središta za $45°$. Odredi površinu presjeka svih crnih polja jedne ploče sa svim crnim poljima druge ploče ako je površina jednog polja jednaka 1.

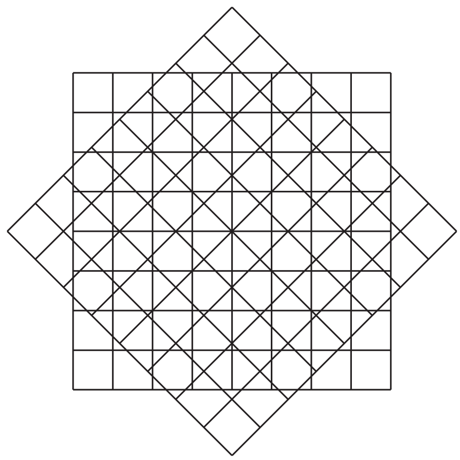
Rješenje. Označimo:

– S_{cc} - zbroj svih zajedničkih površina crnih polja gornje i donje ploče,

– S_{cb} - zbroj svih zajedničkih površina crnih polja gornje i bijelih polja donje ploče,

– S_{bc} - zbroj svih zajedničkih površina bijelih polja gornje i crnih polja donje ploče,

– S_{bb} - zbroj svih zajedničkih površina bijelih polja gornje i donje ploče.



Tada vrijedi $S = S_{cc} + S_{cb} + S_{bc} + S_{bb}$, gdje je S površina pravilnog osmerokuta koji je presjek dviju ploča.

Nazovimo položaj ploča na slici početnim.

Ako zarotiramo gornju ploču za $90°$ oko njezinog središta, crna polja te ploče će doći na mjesta njenih bijelih polja iz početnog položaja, pa je $S_{cc} = S_{bc}$ i $S_{cb} = S_{bb}$.

Ako zarotiramo donju ploču za $90°$ oko njenog središta, njena crna polja će doći na mjesta njenih bijelih polja iz početnog položaja, pa je $S_{cc} = S_{cb}$, $S_{bc} = S_{bb}$ tj.

$$S_{cc} = S_{cb} = S_{bc} = S_{bb} \quad \text{odnosno} \quad S_{cc} = \frac{1}{4}S.$$

Nadalje, površina osmerokuta je jednaka površini kvadrata (šahovske ploče) umanjene za četverostruku površinu odsječenog trokuta, tj. $S = 64 - 4P$.

Odsječeni trokut je pravokutan jednakokračan trokut, pa je njegova baza jednaka dvostrukoj visini, tj. $a = 2v$.

Ako s d označimo duljinu dijagonale šahovske ploče, visina trokuta je $v = \dfrac{d-a}{2} = 4(\sqrt{2}-1)$.

Površina trokuta je $P = \dfrac{av}{2} = v^2 = 16(3 - 2\sqrt{2})$.

Dakle, $S = 64 - 4P = 128(\sqrt{2} - 1)$.

Konačno je $S_{cc} = 32(\sqrt{2} - 1)$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

Zadatak B-4.1. (20 bodova) U rastućem aritmetičkom nizu umnožak drugog i trećeg člana je 3, a umnožak trećeg i petog je -3. Koliko prvih članova niza treba zbrojiti da bi zbroj bio minimalan? Koliki je taj zbroj?

Rješenje. Članove niza ćemo prikazati pomoću prvog člana a_1 i razlike niza d.

Prema uvjetu zadatka imamo ove dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned}(a_1+d)(a_1+2d) &= 3,\\ (a_1+2d)(a_1+4d) &= -3.\end{aligned}$$

Zbrojimo li ove dvije jednadžbe, nakon sređivanja, dobivamo homogenu kvadratnu jednadžbu $2a_1^2+9a_1d+10d^2=0$. Dijeljenjem s d^2 dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$2\left(\frac{a_1}{d}\right)^2+9\cdot\frac{a_1}{d}+10=0.$$

Njezina rješenja su $\frac{a_1}{d}=-2$, $\frac{a_1}{d}=-\frac{5}{2}$. Dobivamo $a_1=-2d$, $a_1=-\frac{5}{2}d$.

Prvo rješenje $a_1=-2d$ nema smisla jer uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $-d\cdot 0=3$!

Za $a_1=-\frac{5}{2}d$ iz prve jednadžbe dobivamo $d=\pm 2$. No, $d=-2$ ne zadovoljava jer niz mora biti rastući. Za $d=2$ dobivamo $a_1=-5$.

Zbroj prvih n članova niza je

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(a_1+a_1+(n-1)d)=n^2-6n=(n-3)^2-9.$$

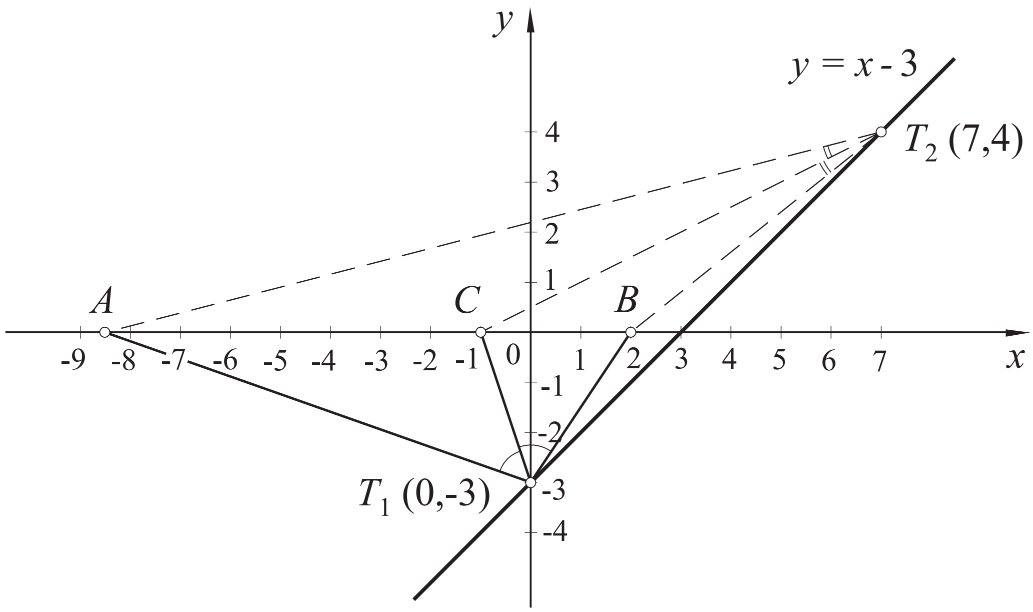
Minimum za S_n dobiva se za $n=3$ i on iznosi $S_{\min}=-9$.

Napomena. Podijelimo li drugu jednadžbu s prvom, dobivamo $\frac{a_1+4d}{a_1+d}=-1$, odakle se dobiva $a_1=-\frac{5}{2}d$, i dalje nastavlja kao gore.

Zadatak B-4.2. (20 bodova) U Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane su točke $A\left(-\frac{17}{2},0\right)$, $B(2,0)$, $C(-1,0)$. Nađi sve točke pravca $y=x-3$ iz koje se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ vide pod istim kutom različitim od nule.

Prvo rješenje. Neka je T tražena točka. Njene koordinate su $T(x,x-3)$. Budući da su kutovi $\sphericalangle CTA$ i $\sphericalangle BTC$ jednaki, dužina $\overline{TC}$ leži na simetrali kuta $\sphericalangle BTA$. Iz teorema o simetrali kuta imamo omjer $|AT| : |BT| = |AC| : |BC|$. Uvrstimo li koordinate točaka imamo

$$\sqrt{\left(x+\frac{17}{2}\right)^2+(x-3)^2} : \sqrt{(x-2)^2+(x-3)^2} = \frac{15}{2} : 3.$$



Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo jednadžbu $x^2 - 7x = 0$, čija su rješenja $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Odgovarajuće ordinate su $y_1 = -3$, $y_2 = 4$.

Dakle, tražene točke su $T_1(0, -3)$ i $T_2(7, 4)$.

Drugo rješenje. Neka je T tražena točka. Njezine koordinate su $T(x, y) = T(x, x - 3)$.

Koeficijent smjera pravca T_1T_2, čije su koordinate $T(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$, je $k_{T_1T_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
U našem slučaju imamo:

$$k_{AT} = \frac{x-3}{x+\frac{17}{2}} = \frac{2(x-3)}{2x+17}, \quad k_{BT} = \frac{x-3}{x-2}, \quad k_{CT} = \frac{x-3}{x+1}.$$

Za kut α između pravaca s koeficijentima smjerova k_1, k_2 vrijedi $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$, a kako je $\sphericalangle CTA = \sphericalangle BTC$ dobivamo

$$\frac{k_{CT} - k_{AT}}{1 + k_{CT} \cdot k_{AT}} = \frac{k_{BT} - k_{CT}}{1 + k_{BT} \cdot k_{CT}}.$$

Uvrstimo li vrijednosti za k_{AT}, k_{BT}, k_{CT} dobivamo

$$\frac{\dfrac{x-3}{x+1} - \dfrac{2(x-3)}{2x+17}}{1 + \dfrac{x-3}{x+1} \cdot \dfrac{2(x-3)}{2x+17}} = \frac{\dfrac{x-3}{x-2} - \dfrac{x-3}{x+1}}{1 + \dfrac{x-3}{x-2} \cdot \dfrac{x-3}{x+1}}.$$

Sređivanjem dvojnih razlomaka dobit ćemo $\dfrac{5(x-3)}{4x^2+7x+35}=\dfrac{x-3}{2x^2-7x+7}$.

Jedno rješenje ove jednadžbe je $x=3$, a pripadna ordinata je $y=0$. U ovom slučaju se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ vide pod kutom jednakim nuli, što ne odgovara uvjetu zadatka. Zato možemo dijeliti s $x-3$ i dobivamo $\dfrac{5}{4x^2+7x+35}=\dfrac{1}{2x^2-7x+7}$.

Nakon sređivanja dobivamo $x(x-7)=0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_1=0$, $x_2=7$, a odgovarajuće ordinate su $y_1=-3$, $y_2=4$.

Dakle tražene točke su $T_1(0,-3)$, $T_2(7,4)$.

Zadatak B-4.3. (20 bodova) Koliki su minimum i maksimum funkcije

$$y=\frac{\sin^2 x-\sin x+1}{\sin^2 x+\sin x+1}?$$

Za koje $x\in[0,2\pi]$ funkcija poprima minimalnu, a za koje maksimalnu vrijednost?

Rješenje. Uočimo da je nazivnik jednak $\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ pa je y definiran za svaki realan broj x. Dobivamo

$$(y-1)\sin^2 x+(y+1)\sin x+y-1=0. \tag{1}$$

Da bi ova kvadratna jednadžba, po $\sin x$, imala realna rješenja, njezina diskriminanta mora biti nenegativna tj.

$$D=(y+1)^2-4(y-1)^2\geq 0 \quad \text{tj.} \quad (3-y)(3y-1)\geq 0.$$

Odavde dobivamo $\dfrac{1}{3}\leq y\leq 3$, odnosno $y_{\min}=\dfrac{1}{3}$, $y_{\max}=3$.

Uvrstimo li $y=\dfrac{1}{3}$ u (1) dobivamo kvadratnu jednadžbu $(\sin x-1)^2=0$ tj. $\sin x=1$, odnosno minimum na $x\in[0,2\pi]$ se postiže za $x=\dfrac{\pi}{2}$. Analogno za $y=3$ dobivamo $(\sin x+1)^2=0$, čije je jedino rješenje $\sin x=-1$ pa se maksimum dostiže za $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Zadatak B-4.4. (20 bodova) Nađi formulu za zbroj

$$S_n=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\ldots+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}.$$

Pokaži da niz zbrojeva konvergira i odredi mu limes!

Rješenje. Preuredimo najprije n-ti član:

$$\begin{aligned}
\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} &= \frac{n+2}{n![1+(n+1)+(n+1)(n+2)]} \\
&= \frac{n+2}{n!(n^2+4n+4)} = \frac{n+2}{n!(n+2)^2} = \frac{1}{n!(n+2)} \cdot \frac{n+1}{n+1} \\
&= \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)-1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.
\end{aligned}$$

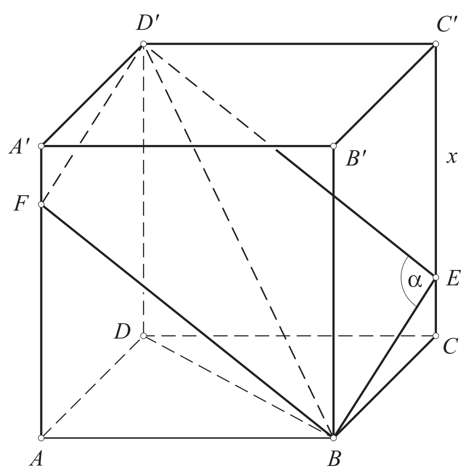
Sada imamo

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}.
\end{aligned}$$

Limes niza S_n je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}\right) = \frac{1}{2}$.

Zadatak B-4.5. (20 bodova) Kocka $ABCDA'B'C'D'$ presječena je ravninom koja sadrži prostornu dijagonalu kocke $\overline{BD'}$ i ima najmanju moguću površinu presjeka s kockom. Koliki je kosinus kuta između te ravnine i ravnine $ABCD$?

Rješenje. Označimo s a duljinu brida kocke. Presjek kocke i ravnine je paralelogram $BED'F$ čija jedna dijagonala je prostorna dijagonala $\overline{BD'}$ kocke. Površina paralelograma je $P = |D'E| \cdot |BE| \cdot \sin\alpha$, gdje je $\alpha = \sphericalangle D'EB$.



Neka je $x = |C'E|$. Tada je $|D'E| = \sqrt{a^2+x^2}$, $|BE| = \sqrt{a^2+(a-x)^2}$.

Korištenjem kosinusovog poučka za trokut $D'BE$ imamo

$$|BD'|^2 = |D'E|^2 + |BE|^2 - 2 \cdot |D'E| \cdot |BE| \cos\alpha.$$

Uvrštavanjem $|BD'| = a\sqrt{3}$ te izraza za $|D'E|$, $|BE|$, nakon sređivanja, imamo

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - ax}{\sqrt{(a^2 + x^2)(a^2 + (a - x)^2)}}.$$

Iz $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ dobivamo

$$\sin\alpha = \frac{a\sqrt{2x^2 - 2ax + 2a^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(a^2 + (a - x)^2)}}.$$

Uvrštavanjem u formulu za površinu paralelograma dobivamo $P = a\sqrt{2x^2 - 2ax + 2a^2}$.

Budući da je pod korijenom kvadratna funkcija, ona poprima minimum za $x = \dfrac{-(-2a)}{2 \cdot 2} = \dfrac{a}{2}$ i on iznosi $P_{\min} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Traženi kut je $\sphericalangle DBD'$. Duljine stranica pravokutnog trokuta DBD' su $|DD'| = a$, $|BD| = a\sqrt{2}$ i $|BD'| = a\sqrt{3}$ pa je

$$\cos\varphi = \frac{|BD|}{|BD'|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Napomena. Može se izračunati $\cos\varphi$ i pomoću formule

$$\cos\varphi = \frac{P_{ABCD}}{P_{\min}} = \frac{a^2}{\frac{a^2\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$